MÉCANIQUE

Tome I **MÉCANIQUE**

Tome II **ÉLECTRICITÉ**

Tome III **ONDES**

Tome IV **CHALEUR**

COURS DE PHYSIQUE

I

MÉCANIQUE

PAR

J.-A. MONARD

PROFESSEUR AU GYMNASE FRANÇAIS DE BIENNE

EDITEUR

CENTRALE D'ACHATS DE LA VILLE DE BIENNE

RENNWEG 62 2501 BIENNE

1988

A toi qui as créé toutes choses,

à toi qui as laissé dans tes oeuvres les marques de ta sagesse et de ta puissance,

à toi qui as donné aux hommes une intelligence et leur as permis de percer quelques-uns des secrets de ta création,

à toi qui t'es révélé, qui as parlé dans ton Fils devenu homme, qui as parlé et qui parles encore dans la Bible - livre vivant,

à toi qui, malgré l'indifférence et le mépris du monde, malgré le meurtre de ton Fils, offres encore aux hommes ta grâce et ton salut,

à toi, ô Dieu, soient hommage et reconnaissance!

AVANT-PROPOS

Ce cours de mécanique s'adresse aux élèves de gymnase (ou d'écoles de niveau voisin) et aux autodidactes. Il a été élaboré avec le souci de laisser place à la diversité des programmes ou des interprétations de programmes, et de répondre aux besoins différenciés des utilisateurs. Il possède ainsi une certaine souplesse, dans la mesure où peut en avoir un cours qui est souvent déductif, et qui voudrait être rigoureux. Il y a un exposé de base, relativement simple, auquel s'ajoutent des compléments (paragraphes avec *), parmi lesquels l'utilisateur sera généralement obligé de faire un choix. L'ordre dans lequel les chapitres sont présentés n'est pas impératif. On étudiera en premier lieu la cinématique (vitesse, accélération, etc.) puis les notions de masse, de quantité de mouvement et de force. Ceci amène au chapitre 8. Ensuite on peut passer soit à la statique (chap. 9 et 10), soit aux divers types de forces (chap. 11, 12, 13), soit au groupe travail-énergie-puissance (chap. 14, 15, 16), soit à l'impulsion (chap. 18), soit aux mouvements harmoniques (chap. 20), soit même à la dynamique des fluides (chap. 22). Il est évident que l'adoption d'un ordre différent de celui du livre entraînera par-ci, par-là certaines nécessités de comblement, mais les renvois insérés dans le texte et l'index faciliteront la tâche.

Chaque chapitre se termine par une série d'exemples de calcul. Ces exercices résolus sont destinés principalement à montrer les techniques d'utilisation des lois physiques et ainsi à aider l'étudiant à en assimiler le contenu. Dans bien des cas, les enseignants auront avantage à traiter avec leurs élèves des exemples de même genre, mais différents. Les élèves pourront alors utiliser les exemples du livre pour tester les connaissances et les aptitudes qu'ils ont acquises. Parfois, les exemples de calcul apportent des compléments au cours.

A la fin du livre se trouve un double recueil d'exercices. Chaque exercice à numéro impair est suivi d'un exercice "jumeau" qui est sensé apporter une contribution équivalente à la formation de l'étudiant. Le premier est accompagné de la réponse, tandis que le second ne l'est pas. Suivant les préférences et les circonstances, on s'orientera vers les pairs ou vers les impairs. En règle générale, il semble qu'une des deux séries devrait suffire à l'élève moyen. On a marqué d'un * les exercices relatifs aux paragraphes portant le même signe, et les exercices pouvant présenter quelque difficulté.

Chapitre 1

INTRODUCTION

§ 1 La mécanique

La mécanique est l'étude du mouvement des corps. Si on se contente d'une simple description du mouvement, on fait de la cinématique. Si on étudie un mouvement en relation avec les causes qui lui donnent sa forme particulière, on fait de la dynamique. Enfin, si on étudie les corps immobiles et les conditions auxquelles leur immobilité subsiste, on fait de la statique.

Le mouvement d'un corps étendu est quelque chose de complexe. Les différents points du corps ne suivent pas tous les mêmes trajectoires et peuvent avoir des vitesses différentes. Pensons par exemple au centre d'une roue de vélo roulant sur une route et à un point du pneu. En revanche, le mouvement d'un très petit grain de matière, dans la mesure où on peut l'assimiler à un point, est relativement simple à décrire. A chaque instant, il n'y a jamais qu'une vitesse à considérer et la trajectoire est une ligne unique.

Dans une première approximation de l'étude d'un mouvement, il est souvent commode d'assimiler l'objet à un point. L'objet est alors appelé point matériel. Quand on dit que la terre décrit une ellipse autour du soleil, on considère la terre comme un point matériel. Mais lorsqu'on s'intéresse à sa rotation sur elle-même, il est évident qu'on ne la considère plus ainsi.

Nous développerons la mécanique en étudiant d'abord le point matériel, ensuite les ensembles de points.

La mécanique que nous allons étudier est la mécanique classique, élaborée par Newton. Le vingtième siècle a introduit deux généralisations de cette mécanique. La première est la mécanique relativiste, indispensable lorsque les mobiles ont des vitesses voisines de celle de la lumière. La seconde est la mécanique quantique, nécessaire lorsqu'on travaille dans le "très petit", c'est-à-dire à l'échelle de l'atome. Ces deux théories ne renversent pas la mécanique classique, elles l'admettent comme cas particulier.

§ 2 Le système international d'unités

La physique est une science quantitative. Elle s'occupe essentiellement de mesures. La mesure d'une grandeur est sa comparaison avec une grandeur de même nature choisie comme unité. Ainsi une grandeur physique s'exprime comme produit d'un nombre et d'une unité. Par exemple:

$$L = 4{,}3 \text{ m}.$$

m et L représentent deux longueurs: m, celle qu'on a choisie comme unité (le mètre) et L, celle qu'on a mesurée.

On distingue entre des unités dites fondamentales, telles le mètre et la seconde, et les unités dérivées obtenues en composant les premières. Le mètre carré (m^2) et le mètre par seconde (m/s), par exemple, résultent d'un produit et d'un quotient d'unités fondamentales.

Pour la géométrie, une seule unité suffit: une unité de longueur, par exemple le mètre. Pour la cinématique, ou description des mouvements, il faut une unité de longueur et une unité de temps, par exemple le mètre et la seconde. Pour la dynamique, qui introduit la masse des mobiles et leurs interactions, il faut en outre une unité de masse, par exemple le kilogramme. Ces trois unités fondamentales suffisent pour la mécanique. On en dérive une foule d'autres unités, par exemple:

$$m^2, \quad m^3, \quad \frac{m}{s}, \quad \frac{m}{s^2}, \quad kg\,\frac{m}{s}, \quad kg\,\frac{m}{s^2}, \quad kg\,\frac{m^2}{s^2}, \quad kg\,\frac{m^2}{s^3}.$$

L'ensemble de ces unités liées les unes aux autres constitue un système d'unités. On l'appelle traditionnellement système MKS. On utilisait autrefois un système ayant pour unités fondamentales le centimètre, le gramme et la seconde: le système CGS.

Lorsqu'on aborde l'électricité, il est indiqué d'introduire une quatrième unité fondamentale. On utilise une unité de courant appelée ampère. La théorie de l'électricité se développe ainsi dans le système dit MKSA ou Giorgi.

Pour le reste de la physique il est suffisant d'introduire trois autres unités fondamentales: une unité de température (le kelvin, pratiquement équivalent au degré), une unité d'intensité lumineuse (la candela) et une unité de quantité de matière (la mole). Ces sept unités, adoptées par la Conférence générale des poids et mesures de 1901 à 1971, et les unités qui en dérivent, constituent le système international d'unités (abréviation SI).

1. Le mètre (m) est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86.

2. Le kilogramme (kg) est la masse du prototype international du kilogramme.

3. La seconde (s) est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

4. L'ampère (A) est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10^{-7} newton par mètre de longueur.

5. Le kelvin (K), unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

6. La candela (cd) est l'intensité lumineuse, dans la direction perpendiculaire, d'une surface de 1/600 000 mètre carré d'un corps noir à la température de congélation du platine sous la pression de 101 325 newtons par mètre carré.

7. La mole (mol) est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogrammes de carbone 12.
Remarque. - Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.

Signalons ici qu'un angle plan se mesure comme quotient de deux longueurs (arc de cercle et rayon). L'unité d'angle est par conséquent le nombre pur 1. On l'appelle communément radian.

$$1 \text{ rad} = 1.$$

On utilise les préfixes suivants pour désigner des multiples et des sous-multiples importants des unités:

Facteur	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	- 10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
Préfixe	pico	nano	micro	milli	- kilo	méga	giga	téra
Symbole	p	n	μ	m	- k	M	G	T

§ 3 Erreurs

La physique travaille continuellement avec des approximations. Une des raisons en est que toute mesure d'une grandeur quelconque est nécessairement entachée d'erreur. Il est impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes. Pour prendre conscience du degré d'approximation auquel on travaille, on fait l'estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d'erreur, ou calcul d'incertitude, dont nous présenterons ici les premiers éléments.

Selon le sens général du mot, une erreur est toujours en relation avec quelque chose de juste ou de vrai, ou qui est considéré comme tel. Il en est de même en physique. L'erreur absolue d'une grandeur mesurée est la distance entre la valeur expérimentale et une valeur que l'on a de bonnes raisons de considérer comme vraie. Prenons par exemple la vitesse de la lumière dans le vide. La valeur considérée actuellement comme vraie est

$$\underline{c} = 299\ 792\ \frac{km}{s}.$$

Si un expérimentateur trouve, lors d'une mesure,

$$c = 305\ 000\ \frac{km}{s},$$

on dit que l'erreur absolue de son résultat est

$$E(c) = |c - \underline{c}| = 5208\ \frac{km}{s}.$$

On définit aussi l'erreur relative, qui est le quotient de l'erreur absolue à la valeur vraie.

$$e(c) = \frac{E(c)}{\underline{c}} = \frac{5208\ km.s^{-1}}{299\ 792\ km.s^{-1}} = 0{,}0174 \cong 1{,}7\ \% = 17\ ‰.$$

L'erreur relative indique la qualité du résultat obtenu. On l'exprime volontiers en pour cent ou en pour mille.

On voit clairement qu'il n'est possible de parler d'erreur que si l'on a à disposition une valeur de référence que l'on peut considérer comme vraie.

§ 4 Incertitudes

Lors de la plupart des mesures physiques, on ne possède pas une valeur de référence, comme celle dont nous venons de parler. Lorsqu'on mesure la distance de deux points, ou l'intervalle de temps qui sépare deux événements, ou la masse d'un objet, on ne sait pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. On ne dispose que de la valeur expérimentale. Néanmoins, par une saine critique des moyens utilisés pour faire la mesure, on peut se faire une idée de l'erreur maximale qu'on peut avoir commise. L'indication complète du résultat d'une mesure physique comporte donc la valeur qu'on estime la plus probable et l'intervalle à l'intérieur duquel on est à peu près certain que se situe la vraie valeur. Sauf cas exceptionnel, on adopte comme valeur la plus probable le centre de cet invervalle. La demi-longueur de celui-ci est appelée incertitude absolue de la mesure. Si la valeur mesurée (la valeur la plus probable) est désignée par a, nous noterons I(a) l'incertitude absolue et a' la vraie valeur (qui reste inconnue). Ainsi, on a:

$$a - I(a) \leq a' \leq a + I(a)$$

L'incertitude absolue résulte toujours d'une estimation. Elle dépend non seulement des moyens utilisés, mais encore du jugement que porte l'expérimentateur sur ces moyens. Or cela est évidemment subjectif. Il convient donc de se souvenir du caractère approximatif des incertitudes, et si l'on fait un calcul avec elles, de se contenter d'un calcul grossier.

L'incertitude absolue, lorsqu'elle est considérée seule, n'indique rien sur la qualité de la mesure. Pour juger de cette qualité, il faut comparer l'incertitude absolue à la grandeur mesurée. Le rapport de ces grandeurs est appelé incertitude relative. Nous noterons celle-ci i(a).

$$i(a) = \frac{I(a)}{a}.$$

L'incertitude relative est un nombre pur, pratiquement toujours beaucoup plus petit que 1. On l'exprime généralement en pour cent ou en pour mille.

Supposons par exemple qu'à l'aide d'un chronographe gradué au centième de seconde, on mesure la durée de chute d'un objet depuis un point déterminé jusqu'au sol. Supposons que l'on trouve 1,34 s. C'est la valeur expérimentale.

$$t = 1{,}34 \text{ s}.$$

Pour tenir compte des temps de réaction de l'opérateur au départ et à l'arrivée, on peut estimer l'incertitude absolue de la mesure à

$$I(t) = 0{,}05 \text{ s}.$$

La vraie valeur de la durée de chute est donc probablement comprise entre 1,29 s et 1,39 s.

$$1{,}29 \text{ s} \leq t' \leq 1{,}39 \text{ s}.$$

Sous une forme condensée, le résultat de la mesure s'écrit en pareil cas:

$$t = 1{,}34 \text{ s} \pm 0{,}05 \text{ s}.$$

C'est une convention d'écriture, qui est manifestement abusive et ne se prête à aucun calcul. Néanmoins elle est très fréquemment utilisée pour noter un résultat d'expérience.

L'incertitude relative de la mesure vaut

$$i(t) = \frac{I(t)}{t} = \frac{0{,}05 \text{ s}}{1{,}34 \text{ s}} = 0{,}0373 \cong 0{,}04 = 4\ \%.$$

En physique expérimentale, les grandeurs que l'on mesure sont généralement utilisées pour déduire des résultats par des calculs. Il est alors intéressant de savoir de quelle manière les incertitudes des mesures se répercutent sur les incertitudes des résultats. Nous allons considérer différents cas, suivant les lois selon lesquelles se composent les grandeurs mesurées. (Nous n'envisageons que des grandeurs physiques positives.)

Addition. Soit s une grandeur obtenue par l'addition de deux grandeurs mesurées a et b.

$$s = a + b.$$

Le maximum que peut atteindre la vraie valeur s' est la somme des maxima que peuvent atteindre les vraies valeurs a' et b'. Symboliquement, nous écrirons:

$$\max s' = \max a' + \max b'.$$

On en tire: $s + I(s) = a + I(a) + b + I(b)$

et $$I(s) = I(a) + I(b).$$

Soustraction. Soit d une grandeur obtenue par la soustraction

de deux grandeurs mesurées a et b.

$$d = a - b.$$

Le maximum que peut atteindre d' correspond à la valeur maximale de a' et à la valeur minimale de b'. Symboliquement, nous écrirons:

$$\max d' = \max a' - \min b'.$$

On en tire: $d + I(d) = a + I(a) - (b - I(b))$

et $$I(d) = I(a) + I(b).$$

On obtient donc des résultats analogues pour l'addition et pour la soustraction.

> Théorème: L'incertitude absolue d'une somme ou d'une différence est égale à la somme des incertitudes absolues des termes.

Multiplication. Soit p une grandeur obtenue par la multiplication de deux grandeurs mesurées a et b.

$$p = ab.$$

La plus grande valeur possible pour p' correspond aux plus grandes valeurs possibles pour a' et b'.

$$\max p' = \max a'. \max b'$$

$$p + I(p) = (a + I(a)).(b + I(b))$$

$$I(p) = b.I(a) + a.I(b) + I(a).I(b)$$

$$\frac{I(p)}{p} = \frac{I(p)}{ab} = \frac{I(a)}{a} + \frac{I(b)}{b} + \frac{I(a)}{a} \cdot \frac{I(b)}{b}$$

$$i(p) = i(a) + i(b) + i(a).i(b)$$

Les incertitudes relatives étant des nombres beaucoup plus petits que 1, le produit i(a).i(b) est négligeable devant les deux termes i(a) et i(b). On a donc:

$$i(p) = i(a) + i(b).$$

Division. Soit q une grandeur obtenue par la division de deux grandeurs mesurées a et b.

$$q = \frac{a}{b}.$$

La valeur maximale qu'on peut avoir pour q' correspond à la valeur maximale de a' et à la valeur minimale de b'

$$\max q' = \frac{\max a'}{\min b'}$$

$$q + I(q) = \frac{a + I(a)}{b - I(b)}$$

$$I(q) = \frac{a + I(a)}{b - I(b)} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b.I(a) - ab + a.I(b)}{b(b - I(b))}$$

$$\cong \frac{b.I(a) + a.I(b)}{b^2},$$

puisque I(b) est négligeable devant b.

$$\frac{I(q)}{q} = \frac{b.I(a) + a.I(b)}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{I(a)}{a} + \frac{I(b)}{b}.$$

On obtient finalement:

$$i(q) = i(a) + i(b).$$

C'est un résultat analogue à celui qui a été établi pour la multiplication.

> Théorème: L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient est égale à la somme des incertitudes relatives des facteurs.

Puissance et racine. Supposons deux variables x et y liées par les relations

$$y = x^n \qquad \text{ou} \qquad x = \sqrt[n]{y}.$$

On a $y = x.x.x...x.$ (n facteurs)

D'après la règle concernant le produit,

$$i(y) = i(x) + i(x) + ... + i(x). \qquad \text{(n termes)}$$

On en déduit:

$$i(y) = n.i(x) \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{1}{n}.i(y).$$

> Théorèmes: L'incertitude relative de la n-ième puissance d'une grandeur vaut n fois l'incertitude relative de cette grandeur. L'incertitude relative de la racine n-ième d'une grandeur vaut la n-ième partie de l'incertitude relative de cette grandeur.

§ 5 Exemples de calcul

Exemple 1: x est une grandeur mesurée et a est un nombre connu. Comparer les incertitudes de x à celles du produit ax.

△△△ On pose: $y = ax.$

On a: $i(y) = i(a) + i(x).$

Et comme il n'y a pas d'incertitude sur a,

$$i(y) = i(x).$$

D'autre part, $I(y) = y.i(y) = ax.i(x) = aI(x).$

Lorsqu'on multiplie une grandeur entachée d'incertitude par un nombre bien déterminé, l'incertitude relative est conservée, tandis que l'incertitude absolue est multipliée par le nombre.

Exemple 2: On mesure le diamètre d'une boule. On trouve 2,94 cm ± 0,04 cm. Calculer son volume et l'incertitude absolue sur celui-ci.

△△△ D'après la règle établie à l'exemple 1, le rayon vaut

$$r = 1{,}47 \text{ cm} \pm 0{,}02 \text{ cm}.$$

Le volume de la sphère vaut

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 13{,}31 \text{ cm}^3.$$

L'incertitude relative sur le rayon est

$$i(r) = \frac{0{,}02 \text{ cm}}{1{,}47 \text{ cm}} \cong 1{,}4 \%.$$

D'après la règle concernant les puissances, l'incertitude relative sur le volume vaut

$$i(V) = i(r^3) = 3i(r) \cong 4 \%.$$

L'incertitude absolue sur le volume est alors

$$I(V) = V.i(V) = 13{,}31 \text{ cm}^3 . \frac{4}{100} \cong 0{,}5 \text{ cm}^3.$$

On a alors: $V = 13{,}3 \text{ cm}^3 \pm 0{,}5 \text{ cm}^3.$

Exemple 3: On mesure le diamètre, la hauteur et la masse d'un cylindre de métal. On trouve: $d = 2R = (2,74 \pm 0,01)$cm, $h = (4,62 \pm 0,01)$cm, $m = (73,7 \pm 0,5)$g. Déterminer la masse volumique de l'objet et l'incertitude de celle-ci.

$\triangle\triangle\triangle$ D'après la règle établie dans l'exemple 1, on a:

$$R = (1,37 \pm 0,005)\text{cm} \qquad \text{et} \qquad i(R) = \frac{0,005}{1,37} \cong 4\ ‰ .$$

De plus, $\quad i(h) = \frac{0,01}{4,62} \cong 2\ ‰ \qquad i(m) = \frac{0,5}{73,7} \cong 7\ ‰ .$

La masse volumique est le rapport de la masse au volume:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} = \frac{73,7\ g}{\pi . 1,37^2\ cm^2 . 4,62\ cm} = 2,705\ \frac{g}{cm^3}.$$

D'après la règle concernant l'incertitude d'un produit et d'un quotient, on a:

$$i(\rho) = i(m) + 2.i(R) + i(h) = 17\ ‰, \qquad I(\rho) = \rho . i(\rho) = 0,05\ \frac{g}{cm^3}.$$

$$\rho = (2,71 \pm 0,05)\frac{g}{cm^3}.$$

Exemple 4: On donne: $a = 312 \pm 1$ et $b = 224 \pm 1$. Calculer les quantités $x = \sqrt{a - b}$ et $y = \sqrt{a + b}$ et leurs incertitudes.

$\triangle\triangle\triangle$ On a d'abord:

$$x = \sqrt{88} = 9,381 \qquad y = \sqrt{536} = 23,152.$$

D'après la règle concernant une somme ou une différence, on a:

$$I(a - b) = I(a) + I(b) = 2 \qquad I(a + b) = I(a) + I(b) = 2.$$

On en déduit:

$$i(a - b) = \frac{2}{88} \cong 2\ \% \qquad i(a + b) = \frac{2}{536} \cong 4\ ‰ .$$

La règle concernant une racine fournit alors:

$$i(x) = \tfrac{1}{2}.i(a - b) = 1\ \% \qquad i(y) = \tfrac{1}{2}.i(a + b) = 2\ ‰ .$$

On en déduit:

$$I(x) = \frac{1}{100} . 9,381 \cong 0,1 \qquad I(y) = \frac{2}{1000} . 23,152 \cong 0,05.$$

$$x = 9,4 \pm 0,1 \qquad y = 23,15 \pm 0,05.$$

Chapitre 2

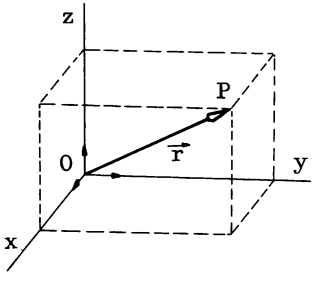
HORAIRES

§ 6 L'espace et le temps

Tout mouvement se développe dans l'espace et dans le temps. Sans entrer dans les détails, nous nous arrêterons un peu à ces notions.

Selon le schéma du monde matériel que donne la physique classique, nous vivons dans un espace métrique euclidien à trois dimensions. La géométrie euclidienne peut donc être considérée comme un premier chapitre de la physique. Elle est suffisamment connue pour que nous n'ayons pas à nous y arrêter.

Pour repérer la position d'un point P dans l'espace, on choisit un point fixe O et on considère le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ qu'on appelle vecteur position ou vecteur lieu du point P. Le point O est l'origine. Les composantes numériques du vecteur position suivant un système d'axes orthonormés Ox, Oy, Oz sont appelées coordonnées du point P. En identifiant un vecteur avec la matrice formée de ses composantes, et en désignant les coordonnées de P par x, y et z, on peut écrire:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'unité de longueur est appelée mètre. Autrefois le mètre était défini comme la distance entre deux raies gravées sur une barre de platine irridié déposée au Bureau International des Poids et Mesures, à Sèvres. La précision qu'on atteint maintenant dans les mesures de longueur dépassant celle de la gravure de l'étalon, on a adopté comme définition du mètre un multiple de la longueur d'onde d'une certaine raie spectrale du krypton. (Pour plus de détails, voir page 9.)

De même qu'une droite est un ensemble de points, on peut considérer le temps comme un ensemble d'instants. Un instant n'a pas de durée. Deux instants quelconques définissent un intervalle de temps, tout comme deux points d'une droite définissent un segment. Un intervalle de temps contient toujours une infinité d'instants. Deux instants distincts sont classés naturellement dans un certain ordre, l'ordre chronologique. Ainsi, les instants constituent un ensemble ordonné. La mesure d'un intervalle de temps est sa durée, de même que la mesure d'un segment est sa longueur.

droite	⟼	temps
point	⟼	instant
segment	⟼	intervalle de temps
longueur	⟼	durée
abscisse	⟼	date, heure

L'unité de temps est appelée seconde. Autrefois la seconde était définie comme la 86'400ème partie du jour solaire moyen (86'400 = 24.60.60). La précision des instruments à mesurer le temps ayant assez augmenté pour mettre en évidence des variations dans le mouvement de rotation de la terre, on a adopté comme définition de la seconde un multiple de la période de vibration d'une certaine raie spectrale du césium. (Pour plus de détails, voir page 9.)

Pour repérer la position d'un instant I dans le cours du temps, on choisit un instant bien déterminé I_o comme origine du temps, et on mesure la durée de l'intervalle défini par ces deux instants. Cette mesure, affectée du signe + ou du signe - suivant que I est postérieur ou antérieur à I_o, est appelée date de l'instant I. Au lieu de date, on dit aussi époque ou heure.

Exemple: Je choisis comme origine du temps, l'instant désigné par minuit dans la dernière nuit écoulée. La date de mon lever, ce matin, est 6 heures; celle de mon coucher, hier soir: - 2 heures; celle de mon coucher, avant-hier soir: - 25 heures; celle de mon lever, demain matin: 30 heures.

La durée Δt d'un intervalle de temps est égale à la date de sa fin t_2 diminuée de la date de son commencement t_1.

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

§ 7 Horaires

Considérons un point matériel en mouvement. L'ensemble des points par lesquels il passe constitue sa trajectoire. A chaque instant, le mobile se trouve en un certain lieu. Il y a

donc une fonction qui, à toute date t, fait correspondre un vecteur position $\vec{r}$. Cette fonction est appelée horaire du mobile.

$$t \longmapsto \vec{r} = f(t).$$

Les composantes du vecteur position, qui sont aussi les coordonnées du mobile, sont trois fonctions du temps

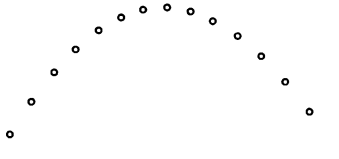
$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

que l'on peut interpréter comme les équations paramétriques de la trajectoire.

Si la trajectoire est dans un plan, on choisit l'origine dans ce plan. Les vecteurs position ont alors deux dimensions.

Nous rencontrerons deux types d'horaires.

1. Il y a tout d'abord les horaires par points discrets. Ce sont ceux qui ne contiennent qu'un nombre fini de couples date-lieu. On obtient de tels horaires lorsqu'on détermine expérimentalement la position d'un mobile en fonction du temps. Le nombre de mesures étant nécessairement limité, le résultat de l'expérience est un tableau faisant correspondre à quelques dates certaines positions du mobile.



L'analyse d'un mouvement rapide peut se faire à l'aide d'un stroboscope et d'un appareil photographique. Le stroboscope est un appareil qui produit des éclairs à intervalles réguliers. On peut étudier le mouvement d'une bille lancée en l'air, par exemple, en travaillant dans un local obscur, en braquant sur la trajectoire de la bille un appareil photographique dont l'obturateur est ouvert et en illuminant la bille avec un stroboscope. L'examen de l'image photographique fournit des positions successives dont on peut calculer les coordonnées. D'autre part, on choisit une origine du temps, par exemple l'instant où a été prise la première image visible sur la photographie. Connaissant l'intervalle de temps qui sépare deux éclairs successifs, on calcule la date qui correspond à chaque image.

Remarquons que les horaires de chemin de fer sont des horaires au sens physique du terme. Ils fournissent des couples heure-lieu. Seulement, il donnent les positions du mobile par des noms géographiques au lieu de les donner par des vecteurs.

2. Il y a ensuite les horaires sous forme analytique. De tels horaires sont des fonctions mathématiques fournissant la position du mobile à tout instant d'un certain intervalle.

Exemple: $\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}t$, pour $0 \leq t \leq 10$ s,

avec $\vec{A} = \begin{pmatrix} 12 \text{ m} \\ -3 \text{ m} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \text{ m/s} \\ -2 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.

On obtient en particulier des horaires de cette forme, lorsqu'une théorie peut prévoir le mouvement d'un mobile, dans une situation connue d'avance.

§ 8 La relativité des mouvements

Le mouvement d'un point matériel est déterminé par son horaire:

$$t \longmapsto \vec{r} = f(t).$$

Or le vecteur position $\vec{r}$ à un instant donné ne dépend pas seulement du mobile mais aussi de l'origine choisie. La fonction horaire ne dépend donc pas seulement du mouvement du mobile, mais du mouvement de l'origine.

On souhaiterait évidemment pouvoir trouver dans l'espace quelque chose d'immobile et étudier les mouvements par rapport à cela. Mais existe-t-il dans la nature des objets immobiles ? Chacun sait que la terre tourne sur elle-même et autour du soleil. Avant d'essayer de répondre à la question, il faut se demander: que signifie le mot "immobile" ?

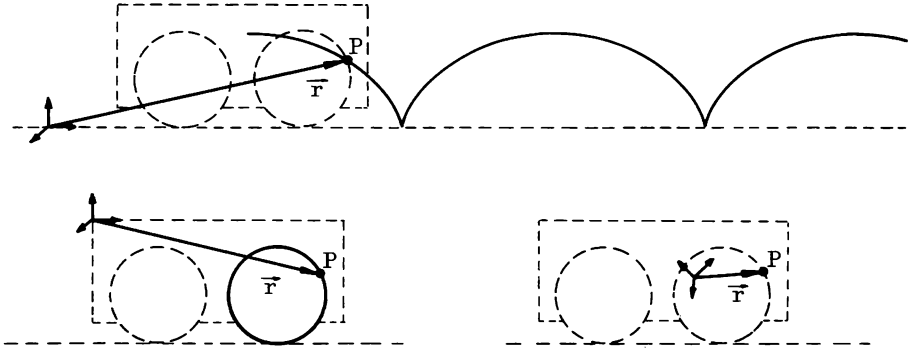
Pour repérer la position d'un point matériel, il faut toujours un référentiel (ou système de référence, ou repère). On appelle ainsi un point origine et trois axes passant par ce point. Mais tandis que le mathématicien peut dire abstraitement: "soit un point O et trois axes Ox, Oy, Oz passant par ce point", le physicien doit préciser le point et les axes dont il parle, au moyen de la matière. Il peut prendre par exemple comme origine le centre de la terre et comme axes les droites reliant ce point aux étoiles Véga, Aldébaran et Arcturus. Il peut aussi prendre comme axes trois droites concourantes formées par les parois et le sol de son laboratoire et comme origine le point où elles se coupent.

On dit qu'un point matériel est immobile par rapport à un certain référentiel si son vecteur position dans ce référentiel ne varie pas au cours du temps. Il est en mouvement par rapport à un certain référentiel si son vecteur position dans ce

référentiel varie au cours du temps. L'immobilité ou le mouvement n'ont jamais de sens absolu. Ces notions sont relatives au système de référence choisi. Tout point matériel peut être considéré comme immobile si l'on prend un référentiel convenable, par exemple un référentiel dont l'origine coïncide avec le point.

Dans le langage courant, on dit volontiers d'un objet qu'il est immobile lorsqu'il est immobile par rapport à un référentiel lié à la terre. Il s'agit là d'un abus de langage.

Intéressons-nous au mouvement d'un point P situé à la périphérie d'une roue d'un chariot roulant sur une route. Relativement à un système de référence lié à la terre, il décrit une courbe appelée cycloïde. Relativement à un référentiel lié au chassis du chariot, il décrit un cercle. Et relativement à un référentiel lié à la roue, il est immobile.



On dit parfois: "relativement à la terre, au chariot, etc" au lieu de "relativement à un référentiel lié à la terre, au chariot, etc."

§ 9* Mouvement rectiligne

Un mobile a un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite ou une portion de droite.

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs constants et f(t) une fonction quelconque du temps. On montre aisément que si un mobile a pour horaire

$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}.f(t),$$

sa trajectoire est rectiligne. A deux instants quelconques

t_1 et t_2, le mobile se trouve en des points P_1 et P_2 repérés par:

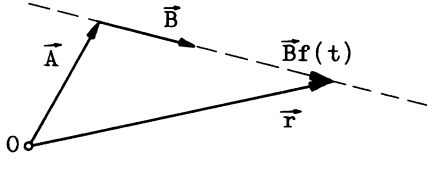
$$\vec{r_1} = \vec{A} + \vec{B}.f(t_1) \qquad \text{et} \qquad \vec{r_2} = \vec{A} + \vec{B}.f(t_2).$$

On en déduit:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{B}.\Big[f(t_2) - f(t_1)\Big].$$

Le vecteur joignant deux points quelconques de la trajectoire est donc parallèle à $\vec{B}$, qui est un vecteur constant. Il en résulte que la trajectoire est rectiligne.

Ce résultat se comprend intuitivement par la construction vectorielle suivante.



D'après l'horaire, le vecteur $\vec{r}$ s'obtient en ajoutant au vecteur constant $\vec{A}$ un vecteur de longueur variable $\vec{B}.f(t)$, colinéaire à $\vec{B}$. La trajectoire est donc sur une droite parallèle à $\vec{B}$ et passant par l'extrémité de $\vec{A}$.

§ 10* Mouvement plan

Supposons qu'un mobile ait pour horaire

$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}.f(t) + \vec{C}.g(t),$$

où $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ sont trois vecteurs constants, et $f(t)$, $g(t)$ deux fonctions quelconques du temps. Soient t_1 et t_2 deux dates quelconques. A ces dates le mobile est aux points P_1 et P_2 définis par les vecteurs

$$\vec{r_1} = \vec{A} + \vec{B}.f(t_1) + \vec{C}.g(t_1),$$

$$\vec{r_2} = \vec{A} + \vec{B}.f(t_2) + \vec{C}.g(t_2).$$

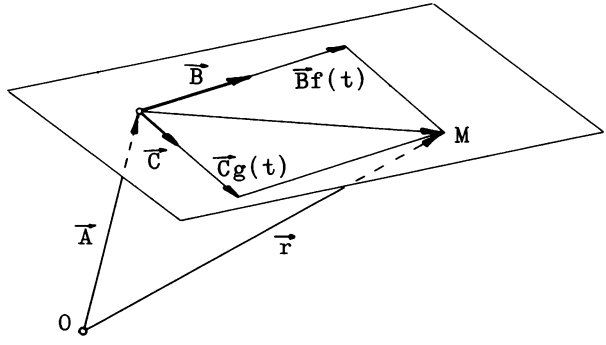
On en déduit:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{B}.\Big[f(t_2) - f(t_1)\Big] + \vec{C}.\Big[g(t_2) - g(t_1)\Big].$$

Le vecteur joignant deux points quelconques de la trajectoire est donc parallèle au plan défini par les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$. Cela implique que la trajectoire est plane.

Ce résultat se comprend intuitivement par la construction vectorielle qui suit. D'après l'horaire, le vecteur $\vec{r}$ s'obtient

en ajoutant au vecteur constant $\vec{A}$ la somme de deux vecteurs de longueurs variables $\vec{B}.f(t)$ et $\vec{C}.g(t)$, somme qui est située toujours dans le plan défini par $\vec{B}$ et $\vec{C}$.



§ 11 Exemples de calcul

Exemple 1: Un point matériel se déplace dans un plan. Son horaire est:

$$\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C},$$

où t varie de -2 s à 2 s. Dans une base orthonormée du plan, les paramètres $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ s'expriment comme suit:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2\ \text{m/s}^2 \\ 1\ \text{m/s}^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 3\ \text{m/s} \\ 2\ \text{m/s} \end{pmatrix}, \qquad \vec{C} = \begin{pmatrix} 10\ \text{m} \\ -2\ \text{m} \end{pmatrix}.$$

Calculer la position du mobile, de seconde en seconde, dans l'intervalle indiqué. Représenter graphiquement la trajectoire, en faisant correspondre 1 m à 1 carreau.

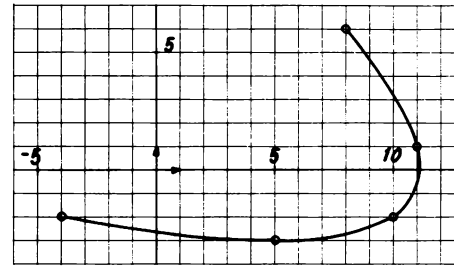
$\triangle\triangle\triangle$ Calculons la position du mobile en t = -2 s.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2\ \text{m/s}^2 \\ 1\ \text{m/s}^2 \end{pmatrix}.4\ \text{s}^2 + \begin{pmatrix} 3\ \text{m/s} \\ 2\ \text{m/s} \end{pmatrix}.(-2\ \text{s}) + \begin{pmatrix} 10\ \text{m} \\ -2\ \text{m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8\ \text{m} \\ 4\ \text{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6\ \text{m} \\ -4\ \text{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\ \text{m} \\ -2\ \text{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\ \text{m} \\ -2\ \text{m} \end{pmatrix}.$$

En calculant de la même façon la position aux autres dates on trouve les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessous. On peut alors représenter graphiquement la trajectoire.

t (s)	x (m)	y (m)
-2	-4	-2
-1	5	-3
0	10	-2
1	11	1
2	8	6



Exemple 2: On observe que deux mobiles ont les horaires respectifs suivants:

$$\vec{r}_1 = \vec{A} + \vec{B}t \qquad \text{et} \qquad \vec{r}_2 = \vec{C} + \vec{D}t \qquad \text{où}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 20\ \text{m} \\ -5\ \text{m} \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} -1\ \text{m/s} \\ 5\ \text{m/s} \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 8\ \text{m} \\ 15\ \text{m} \end{pmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 2\ \text{m/s} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux mobiles gardent les mêmes horaires jusqu'à ce qu'un choc éventuel vienne perturber leur mouvement. Déterminer s'il y a collision et, le cas échéant, où et à quelle heure.

$\triangle\triangle\triangle$ Il y a collision si, à un certain instant, les deux mobiles sont au même point; c'est-à-dire s'il existe une valeur de t pour laquelle $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Il s'agit donc de savoir si l'équation

$$\vec{A} + \vec{B}t = \vec{C} + \vec{D}t$$

admet une solution t. Cette équation s'écrit aussi:

$$(\vec{B} - \vec{D})t = \vec{C} - \vec{A} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} -3\ \text{m/s} \\ 5\ \text{m/s} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} -12\ \text{m} \\ 20\ \text{m} \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices étant linéairement dépendantes, l'équation possède une solution. Celle-ci est: t = 4 s. Les deux mobiles se heurtent donc à la date t = 4 s. Le lieu du choc est donné par les horaires des mobiles dans lesquels on introduit la valeur t = 4 s. On trouve:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 16\ \text{m} \\ 15\ \text{m} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

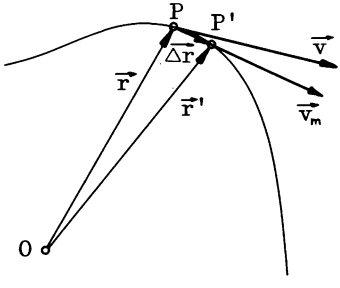
VITESSE

§ 12 Définition de la vitesse

Considérons un point matériel M en mouvement. Supposons que, dans un certain intervalle, son horaire soit entièrement connu:

$$\vec{r} = f(t).$$

Nous allons définir la vitesse du mobile en un point quelconque P de sa trajectoire. Soit t la date de passage du mobile au point P. Un petit moment plus tard, à une date t', le mobile se trouve au point P'. Le déplacement de P à P' peut se représenter par le vecteur



$$\vec{\Delta r} = \vec{r}' - \vec{r}.$$

Le temps utilisé pour ce déplacement vaut

$$\Delta t = t' - t.$$

On définit la vitesse moyenne sur le parcours PP' par le rapport de l'espace parcouru (considéré vectoriellement) au temps de parcours:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}.$$

Cette façon de faire est quelque peu grossière, car elle ignore volontairement ce qui s'est passé entre P et P'. On pressent toutefois qu'elle est d'autant plus valable que P' est voisin de P, ou que l'intervalle de temps Δt est petit.

Supposons qu'on choisisse des intervalles de temps Δt de plus en plus petits. Les espaces parcourus $\vec{\Delta r}$ deviennent aussi de plus en plus petits. Dans le quotient qui définit la vitesse moyenne, le numérateur et le dénominateur diminuent ensemble,

de sorte que l'on peut s'attendre à ce que $\vec{v}_m$ ne varie pas beaucoup. En fait, dans la plupart des mouvements qu'on peut être amené à considérer, $\vec{v}_m$ tend vers une limite lorsque Δt tend vers zéro. Cette limite est, par définition, la vitesse au point P. Pour exprimer cela, on utilise l'une ou l'autre des notations suivantes:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}}.$$

Ce que nous venons de faire avec le vecteur $\vec{r}$, fonction de la variable t, peut être fait avec d'autres fonctions. Cette opération, qui joue un rôle important en mathématique, se nomme dérivation. Et le résultat de cette opération porte le nom de dérivée. Ainsi, la vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Le vecteur $\vec{v}_m$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{\Delta r}$ correspondant. Il est porté par la sécante PP'. Lorsque Δt tend vers zéro, le point P' se rapproche indéfiniment de P et la sécante PP' devient la tangente à la trajectoire au point P. Il en résulte que le vecteur vitesse en un point est tangent à la trajectoire en ce point. Dans le cas particulier où la trajectoire est rectiligne, le vecteur vitesse est porté par la trajectoire.

La grandeur du vecteur vitesse (appelée aussi norme ou module de ce vecteur) sera désignée par v. On pose donc

$$\|\vec{v}\| = v.$$

v est toujours positif. Les composantes du vecteur vitesse suivant des axes orthonormés Ox, Oy, Oz seront désignées par v_x , v_y , v_z . Ces composantes sont positives ou négatives, suivant que $\vec{v}$ fait avec les axes des angles inférieurs ou supérieurs à $\pi/2$. En identifiant le vecteur avec la matrice formée de ses composantes, nous écrirons:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

La norme et les composantes de la vitesse (comme pour tout vecteur) sont liées par la relation

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

La définition de la vitesse comme limite d'une vitesse moyen-

ne est illustrée par l'exemple 1 du paragraphe 15.

Lorsque l'horaire du mobile est donné sous forme analytique, le procédé de dérivation enseigné par les mathématiques fournit immédiatement non seulement la vitesse en un point mais l'horaire de la vitesse.

$$t \longmapsto \vec{v} = g(t).$$

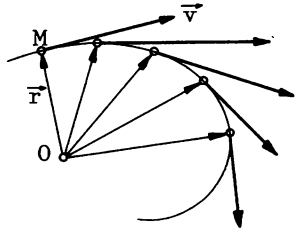
Voir les exemples 1 et 2 du paragraphe 15.

Lorsqu'on calcule la vitesse d'un mobile dont l'horaire est donné par points discrets, il n'est pas possible de considérer des intervalles qui tendent vers zéro et de calculer la limite de la vitesse moyenne. On se contente alors d'une approximation. On obtient de bons résultats en prenant pour vitesse en un point P la vitesse moyenne sur l'intervalle déterminé par les deux points les plus voisins, de part et d'autre de P.

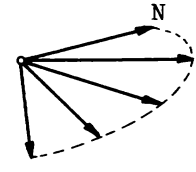
Voir l'exemple 3 du paragraphe 15.

Quel que soit le type d'horaire, analytique ou par points discrets, il peut être utile d'effectuer une représentation graphique de l'horaire de la vitesse. Pour cela, on donne à toutes les vitesses une origine commune. Les extrémités des vecteurs vitesse donnent une courbe. Cette représentation graphique porte le nom d'hodographe.

Trajectoire:



Hodographe:



§ 13 Mouvement uniforme

Définition: Un point matériel a un mouvement uniforme si la norme de sa vitesse est constante.

Nous ne disons pas "si sa vitesse est constante", ce qui impliquerait que la vitesse ne pourrait varier en aucune façon. Dans un mouvement uniforme, la vitesse peut changer de direc-

tion.

Les mouvements uniformes sont fréquents. Chaque fois que le tachymètre d'un train ou d'une auto indique une valeur fixe, le mobile a un mouvement uniforme.

Soient A et B deux points de la trajectoire d'un mobile animé d'un mouvement uniforme. Décomposons la courbe AB en un très grand nombre n de petits tronçons. Chacun d'eux doit être suffisamment petit pour qu'on puisse, sans grande erreur, le considérer comme rectiligne. Chaque petit élément de trajectoire est désigné par un vecteur $\overrightarrow{\Delta r_i}$ (i = 1, 2, ..., n). Appelons Δt_i l'intervalle de temps mis par le mobile pour parcourir le trajet $\overrightarrow{\Delta r_i}$ et $\vec{v}_i$ la vitesse moyenne sur ce trajet. On peut écrire les n équations:

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{\Delta r_i}}{\Delta t_i}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

On en déduit, relativement aux normes des vecteurs:

$$v_i = \frac{\left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\|}{\Delta t_i}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tous les v_i sont égaux, puisque la vitesse a une grandeur constante. Désignons celle-ci par v. On a donc:

$$\left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\| = v.\Delta t_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Additionnons membre à membre toutes ces équations et mettons en évidence le facteur constant v.

$$\sum\left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\| = \sum v.\Delta t_i = v.\sum\Delta t_i.$$

A un passage à la limite près, la somme du premier membre représente la longueur de l'arc de courbe AB. La somme du dernier membre est le temps mis par le mobile pour passer de A à B.

Désignons par s la longueur de l'arc AB, qui est un espace parcouru par le mobile, et par t la durée de ce parcours. La dernière égalité s'écrit alors:

$$\boxed{s = vt.}$$

On retrouve ici, dans ce cas particulier, la relation

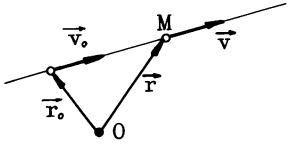
$$\text{vitesse} = \frac{\text{espace parcouru}}{\text{temps de parcours}}$$

qui est utilisée dans les cours élémentaires pour définir la vitesse. Soulignons qu'elle n'est valable que pour les mouvements uniformes.

§ 14* Mouvement rectiligne uniforme

Comme son nom l'indique, ce mouvement est caractérisé par une trajectoire rectiligne et une vitesse de grandeur constante. Il n'y a donc aucune variation du vecteur vitesse du mobile au cours du temps.

Comme nous le ferons encore à plusieurs reprises, désignons la valeur de la vitesse à la date t = 0 par le symbole $\vec{v}_o$ et la valeur du vecteur position au même instant par $\vec{r}_o$. Connaissant $\vec{v}_o$ et $\vec{r}_o$, et sachant que la vitesse est constante, est-il possible de trouver l'horaire du mobile ?



L'horaire de la vitesse est:

$$\vec{v} = \vec{v}_o .$$

Il exprime qu'à tout instant, la vitesse a la même valeur qu'en t = 0. Utilisons la définition de la vitesse et remplaçons $\vec{v}$ par la dérivée du vecteur position.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o .$$

Cette équation est une condition sur la fonction $\vec{r} = f(t)$, qui est l'horaire du mobile. Elle exige que la dérivée de la fonction $\vec{r}$ soit égale à la constante $\vec{v}_o$. Les règles de la dérivation nous apprennent que la seule fonction dont la dérivée soit constante est la fonction affine. La variable étant la date t, nous en concluons que l'horaire est une fonction affine du temps.

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{v}_o\, t.$$

$\vec{c}$ est une constante arbitraire.

Or nous savons qu'en t = 0, le vecteur position a la valeur

$\vec{r_o}$. Cela implique $\vec{c} = \vec{r_o}$. L'horaire d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme est donc:

$$\vec{r} = \vec{r_o} + \vec{v_o}\, t.$$

Remarquons en passant que les deux mobiles de l'exemple 2 du paragraphe 11 étaient animés de mouvements uniformes. Leurs vitesses respectives étaient données par les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{D}$ et leurs positions initiales par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{C}$.

§ 15 Exemples de calcul

Exemple 1: Un mobile a pour horaire: $\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t$,

$$\text{où} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

Déterminer sa vitesse en $t = 2$ s, en faisant deux approximations successives, puis en dérivant l'horaire.

△△△ a) Première approximation.

Calculons la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps défini par les dates 2 s et 2,1 s.

En $t = 2$ s, $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}.4 \text{ s}^2 + \begin{pmatrix} -1 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}.2 \text{ s} = \begin{pmatrix} 6 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \end{pmatrix}.$

En $t' = 2{,}1$ s, $\quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}.4{,}41 \text{ s}^2 + \begin{pmatrix} -1 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}.2{,}1 \text{ s} = \begin{pmatrix} 6{,}72 \text{ m} \\ 2{,}1 \text{ m} \end{pmatrix}.$

On a alors:

$$\Delta t = t' - t = 0{,}1 \text{ s}, \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}' - \vec{r} = \begin{pmatrix} 0{,}72 \text{ m} \\ 0{,}1 \text{ m} \end{pmatrix}.$$

Vitesse moyenne: $\quad \vec{v}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$

b) Deuxième approximation.

Prenons un intervalle de temps 10 fois plus petit.

En $t = 2$ s, $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \end{pmatrix}.$

En $t' = 2{,}01$ s, $\quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} 6{,}0702 \text{ m} \\ 2{,}01 \text{ m} \end{pmatrix}.$

On en déduit:

$$\Delta t = t' - t = 0{,}01 \text{ s}, \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}' - \vec{r} = \begin{pmatrix} 0{,}0702 \text{ m} \\ 0{,}01 \text{ m} \end{pmatrix}.$$

Vitesse moyenne: $\vec{v}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 7{,}02 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.

Les deux vitesses moyennes calculées semblent s'approcher de la valeur

$$\begin{pmatrix} 7 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

c) Calcul rigoureux, par dérivation.

En appliquant à l'horaire

$$\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t$$

les règles de dérivation qu'on établit en mathématique, on trouve, pour l'horaire de la vitesse:

$$\vec{v} = 2\vec{A}t + \vec{B}.$$

En $t = 2$ s, $\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix} . 2 \text{ s} + \begin{pmatrix} -1 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.

La valeur de ce procédé réside non seulement dans sa simplicité, mais dans le fait qu'il donne d'emblée un résultat rigoureux.

Exemple 2: Déterminer et représenter graphiquement, de seconde en seconde, la position et la vitesse d'un point matériel ayant l'horaire:

$$\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C} \qquad -2 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$$

avec $\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \text{ m/s}^2 \\ 1 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \text{ m/s} \\ 2 \text{ m/s} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 10 \text{ m} \\ -2 \text{ m} \end{pmatrix}$.

$\triangle\triangle\triangle$ La première partie de l'exercice a été traitée au paragraphe 11. Le lecteur s'y reportera.

En dérivant l'horaire, nous trouvons l'horaire de la vitesse:

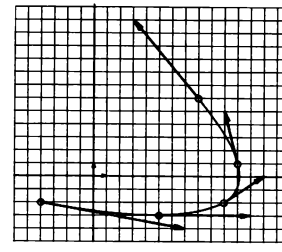
$$\vec{v} = 2\vec{A}t + \vec{B}.$$

A titre d'exemple, calculons la vitesse en $t = -2$ s.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \text{ m/s}^2 \\ 2 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix} . (-2 \text{ s}) + \begin{pmatrix} 3 \text{ m/s} \\ 2 \text{ m/s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \text{ m/s} \\ -2 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on calcule la vitesse aux autres dates. On peut ainsi compléter par les vecteurs vitesse la représentation graphique faite au paragraphe 11.

t	v_x	v_y
-2 s	11 ms^{-1}	-2 ms^{-1}
-1	7	0
0	3	2
1	-1	4
2	-5	6



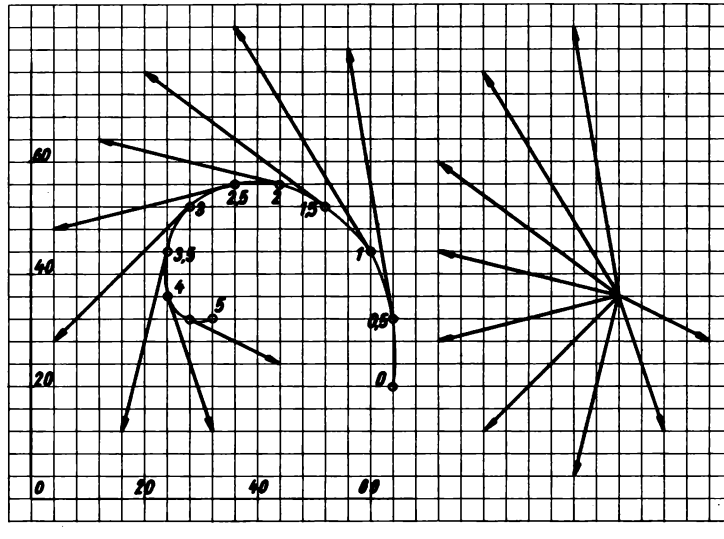
Exemple 3: En repérant toutes les demi secondes la position d'un mobile se déplaçant dans un plan, on obtient l'horaire suivant:

Date (s):	0	0,5	1	1,5	2
Position (m):	(64;20)	(64;32)	(60;44)	(52;52)	(44;56)

2,5	3	3,5	4	4,5	5
(36;56)	(28;52)	(24;44)	(24;36)	(28;32)	(32;32)

Représenter graphiquement la trajectoire. Calculer la vitesse et la représenter graphiquement. Construire l'hodographe.

△△△



Pour les longueurs:
1 carreau ~ 4 m.

Pour les vitesses:
1 carreau ~ 2 m/s.

A titre d'exemple, calculons la vitesse en t = 1,5 s. Comme valeur approximative de cette vitesse, prenons la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps allant de 1 s à 2 s.

$$\Delta t = 2\text{ s} - 1\text{ s} = 1\text{ s}, \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \begin{pmatrix} 44\text{ m} \\ 56\text{ m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 60\text{ m} \\ 44\text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\text{ m} \\ 12\text{ m} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} -16\text{ m/s} \\ 12\text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que les échelles de représentation sont telles que le vecteur représentant la vitesse est égal au double du vecteur représentant $\overrightarrow{\Delta r}$. Cette constatation permet de construire tous les vecteurs vitesse sans autres calculs.

Exemple 4: Quelle est la distance franchie en 1 min 10 s par une voiture qui roule à une vitesse de 100 km/h.

△△△ La donnée implique que le mouvement est uniforme. La distance franchie vaut donc:

$$s = vt.$$

Transformation d'unités: (attention, retenir la méthode!)

$$100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\ \frac{1\text{ km}}{1\text{ h}} = 100\ \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 27{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

On en déduit: $s = vt = 27{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 70\text{ s} = 1950\text{ m}.$

Exemple 5*: Un point matériel a l'horaire suivant:

$$\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}t^2 \quad \text{où } \vec{A} = \begin{pmatrix} 4\text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} -2\text{ m/s}^2 \\ 1\text{ m/s}^2 \end{pmatrix}.$$

a) A quels moments sa vitesse est-elle parallèle aux axes de coordonnées ?
b) A quels moments sa vitesse a-t-elle une grandeur de 2 m/s ?

△△△ L'horaire de la vitesse est

$$\vec{v} = \vec{A} + 2\vec{B}t.$$

En composantes, cet horaire s'écrit:

$$v_x = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \qquad v_y = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$$

a) La vitesse est parallèle à Oy si sa première composante est nulle, c'est-à-dire si

$$4 \frac{m}{s} - 4 \frac{m}{s^2} . t = 0.$$

Il en est ainsi en t = 1 s.

La vitesse est parallèle à Ox si sa seconde composante est nulle. Il en est ainsi en t = 0.

b) La norme de la vitesse s'exprime en fonction du temps par la relation

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16 - 32\ t + 16\ t^2 + 4\ t^2}$$

(On laisse momentanément tomber les unités pour ne pas surcharger l'écriture).

La condition $2 = \sqrt{16 - 32\ t + 20\ t^2}$

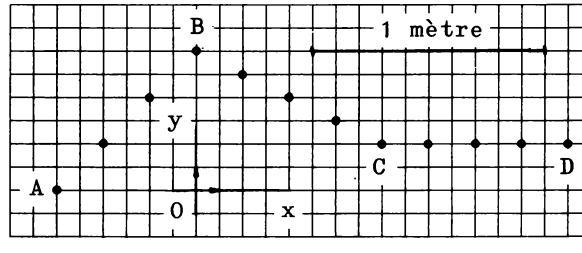
est une équation du second degré,

$$20\ t^2 - 32\ t + 12 = 0,$$

qui admet pour solutions 1 et 0,6.

La vitesse a une grandeur de 2 m/s aux dates t = 1 s et t = 0,6 s.

Exemple 6*: Une bille suit le trajet ABCD représenté ci-dessous.



Sa position est donnée de dixième en dixième de seconde. Etablir un horaire analytique du mouvement qui soit compatible avec les positions données par la figure. Choisir l'origine du temps à l'instant où la bille a passé en A.

△△△ Sur chacun des trajets AB, BC et CD, le déplacement réalisé en un dixième de seconde est constant. Sur chaque trajet, on a donc un mouvement rectiligne uniforme.

a) Trajet AB. Horaire: $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o\, t$

avec $\vec{r}_o = \begin{pmatrix} -0{,}6 \text{ m} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_o = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \text{ m} \\ 0{,}2 \text{ m} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0{,}1 \text{ s}} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s} \\ 2 \text{ m/s} \end{pmatrix}$

b) Trajet BC. Horaire: $\vec{r} = \vec{r}_o' + \vec{v}_o' t$

avec $\vec{v}_o' = \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \text{ m} \\ -0{,}1 \text{ m} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0{,}1 \text{ s}} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s} \\ -1 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.

Pour trouver $\vec{r}_o'$, on peut chercher où aurait été la bille en $t = 0$ si le mouvement avait toujours été comme sur BC. La figure montre qu'elle aurait été au point (-0,6 m; 0,9 m). On conclut:

$$\vec{r}_o' = \begin{pmatrix} -0{,}6 \text{ m} \\ 0{,}9 \text{ m} \end{pmatrix}.$$

c) Trajet CD. Horaire: $\vec{r} = \vec{r}_o'' + \vec{v}_o'' t$

avec $\vec{v}_o'' = \frac{\Delta\vec{r}''}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \text{ m} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0{,}1 \text{ s}} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour trouver $\vec{r}_o''$, on peut faire comme pour $\vec{r}_o'$. On peut aussi poser la condition que le mobile se trouve en C à la date $t = 0{,}7$ s. On obtient alors une équation de laquelle on tire $\vec{r}_o''$.

$\begin{pmatrix} 0{,}8 \text{ m} \\ 0{,}2 \text{ m} \end{pmatrix} = \vec{r}_o'' + \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0{,}7 \text{ s}.$ D'où $\vec{r}_o'' = \begin{pmatrix} -0{,}6 \text{ m} \\ 0{,}2 \text{ m} \end{pmatrix}$.

$\vec{a}$

Chapitre 4

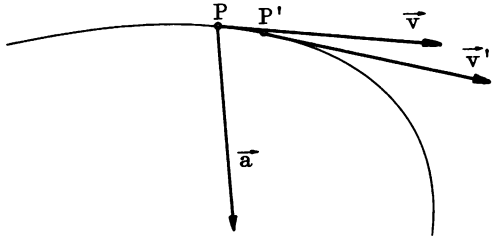
ACCELERATION

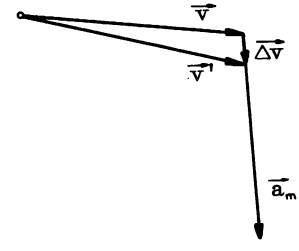
§ 16 Définition de l'accélération

Soit un point matériel M en mouvement. Supposons que, dans un certain intervalle de temps, l'horaire de sa vitesse soit entièrement connu:

$$\vec{v} = g(t).$$

Nous nous proposons de définir l'accélération en un point P quelconque de la trajectoire du mobile.





Soit t la date de passage du mobile au point P. Un petit moment plus tard, à une date t', le mobile se trouve en P'. Soient $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ les vitesses du mobile en ces points. Durant l'intervalle de temps

$$\Delta t = t' - t,$$

la vitesse a subi la variation

$$\vec{\Delta v} = \vec{v}' - \vec{v}.$$

L'accélération moyenne dans cet intervalle est définie par le quotient

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Choisissons des intervalles de temps de plus en plus petits. La variation correspondante de vitesse devient aussi de plus en plus petite. Dans la plupart des cas, le rapport $\overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$ tend vers une limite lorsque Δt tend vers zéro. Cette limite est, par définition, l'accélération du mobile au point P. Et on écrit:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}.$$

Nous venons de faire avec la vitesse l'opération que nous avons faite au paragraphe 12 avec le vecteur position. L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Si, pour un intervalle de temps donné, le mobile subit une grande variation de vitesse, le quotient $\overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$ est grand. Ainsi l'accélération est grande lorsque la vitesse varie rapidement. L'accélération exprime donc la rapidité avec laquelle varie la vitesse.

Dans le langage courant, le mot "accélération" évoque la rapidité avec laquelle une vitesse s'accroît. Il s'oppose au mot "ralentissement". La notion physique d'accélération est sensiblement différente. Il y a accélération toutes les fois que la vitesse varie au cours du temps. Les variations de vitesse peuvent être des variations de norme - augmentations ou diminutions - ou des variations de direction. Lorsqu'une automobile freine, la physique considère qu'elle a une accélération. Et si elle est dans une courbe, il y a également une accélération, même si le tachymètre indique toujours la même valeur.

L'accélération est la dérivée de la vitesse, qui, elle-même, est la dérivée du vecteur position. On obtient donc l'accélération en dérivant deux fois de suite la fonction horaire. Pour cette raison, on dit que l'accélération est la deuxième dérivée du vecteur position par rapport au temps. On écrit:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}.$$

Ces dérivations sont effectivement possibles lorsque l'horaire est donné sous une forme analytique. On obtient alors l'horaire de l'accélération:

$$t \longmapsto \vec{a} = h(t).$$

Voir l'exemple 1 du paragraphe 20.

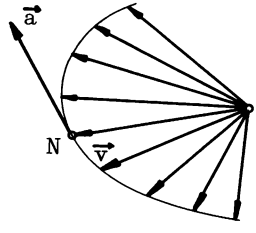
Si l'horaire du mobile est donné par points discrets, il n'est

pas possible de faire un passage à la limite pour calculer l'accélération. On se contente alors de l'approximation qui consiste à confondre l'accélération avec l'accélération moyenne. En outre, on ne peut calculer qu'un nombre fini d'accélérations. Voir l'exemple 2 du paragraphe 20.

La grandeur ou la norme de l'accélération s'exprime en fonction de ses composantes suivant des axes orthonormés par la relation

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Considérons l'hodographe d'un mobile. Soit N, l'extrémité du vecteur vitesse. A chaque date correspond un point N. Tandis que le temps s'écoule, et que le mobile M décrit sa trajectoire, le point N décrit une courbe. Le vecteur position de N dans l'hodographe est identique à la vitesse de M sur la trajectoire.



$$\vec{r}(N) = \vec{v}(M).$$

Par dérivation, on en déduit:

$$\dot{\vec{r}}(N) = \dot{\vec{v}}(M), \qquad \text{ou} \qquad \vec{v}(N) = \vec{a}(M).$$

La vitesse du point N dans l'hodographe est donc égale à l'accélération du mobile sur la trajectoire.

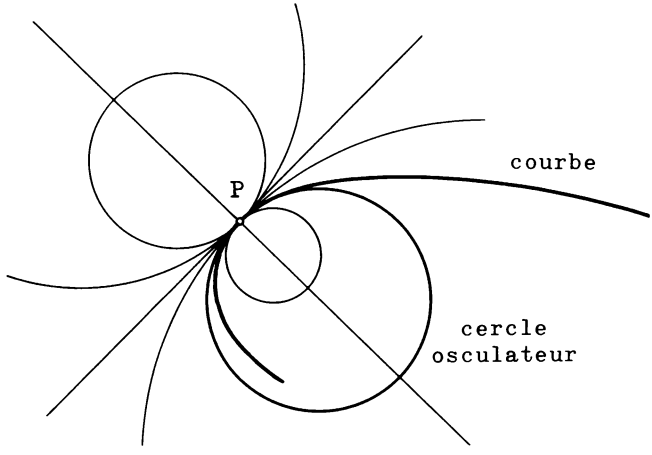
§ 17 Cercle osculateur et plan osculateur

Sur une courbe quelconque ne présentant pas de points anguleux, considérons un point quelconque P et deux points P' et P'' voisins de P. Ces trois points définissent un cercle. Si P' et P'' se rapprochent indéfiniment de P, ce cercle tend vers une position limite. Il devient le cercle osculateur à la courbe au point P. Le rayon du cercle osculateur est appelé rayon de courbure au point considéré. On le désigne par ρ.

Il y a une infinité de cercles tangents à une courbe en un point donné P. Tous leurs centres se trouvent dans le plan qui passe par P et qui est perpendiculaire à la courbe. Le cercle osculateur est celui de tous ces cercles qui suit le mieux la courbe dans le voisinage de P. On peut, sans faire d'erreur importante, confondre une petite portion de courbe avec un petit arc du cercle osculateur correspondant.

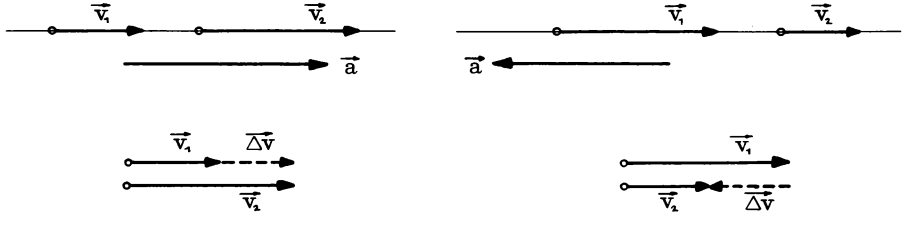
Le plan dans lequel se trouve le cercle osculateur se nomme

plan osculateur. Dans le cas d'une courbe gauche, le plan osculateur varie d'un point à un autre. Dans le cas d'une courbe plane, tous les plans osculateurs sont confondus. Dans le cas d'une droite, tout plan contenant la droite peut être considéré comme plan osculateur.



§ 18 Direction et sens de l'accélération

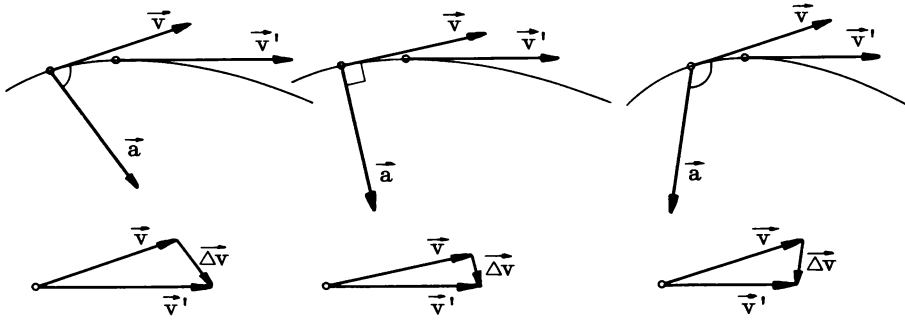
Considérons un mobile décrivant une trajectoire rectiligne. En tout point, le vecteur vitesse est porté par la trajectoire. Le vecteur $\overrightarrow{\Delta v}$, différence de deux vitesses, a la même direction. Et le vecteur $\vec{a}$ a encore la même direction. Dans un mouvement rectiligne, l'accélération est donc portée par la trajectoire.



Si la vitesse augmente, l'accélération est orientée vers l'avant. Si la vitesse diminue, l'accélération est orientée vers l'arrière.

Si, sur une trajectoire rectiligne, la vitesse a une grandeur fixe, tous les vecteurs $\vec{v}$ sont égaux. $\Delta\vec{v}$ est alors nul, et par suite $\vec{a}$ aussi. Dans un mouvement rectiligne et uniforme, l'accélération est nulle. Ceci est d'ailleurs évident si l'on se souvient que l'accélération est la dérivée de la vitesse et que la dérivée d'une constante est nulle.

Considérons maintenant un mobile décrivant une trajectoire courbe. On peut montrer qu'en tout point l'accélération est située dans le plan osculateur à la trajectoire. De plus, la figure ci-dessous fait voir que l'accélération est toujours dirigée vers la concavité de la trajectoire, qu'elle fait un angle aigu avec la vitesse si celle-ci augmente, un angle obtus si elle diminue, et un angle droit si elle a une grandeur fixe.



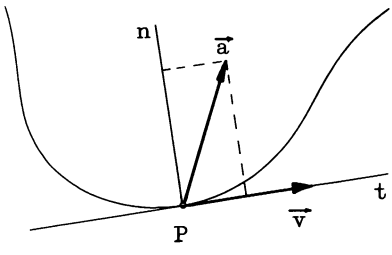
Il est utile de remarquer que, dans le cas d'une trajectoire curviligne, la grandeur de $\Delta\vec{v}$ n'est pas égale à la différence des normes des vecteurs $\vec{v}'$ et $\vec{v}$, ces trois vecteurs formant un triangle.

Les règles présentées ci-dessus sont illustrées par les exemples 1 et 2 du paragraphe 20.

§ 19* Accélération tangentielle et accélération normale

Le lecteur débutant aura peut-être intérêt à étudier ce paragraphe après les mouvements particuliers traités dans le chapitre suivant.

Soit un point matériel M ayant un mouvement quelconque. En chaque point P où le mobile peut se trouver, plaçons deux axes dans le plan osculateur à la trajectoire:



- un axe tangent à la trajectoire, et orienté dans le même sens que la vitesse, et
- un axe normal à la trajectoire, et orienté vers la concavité de celle-ci.

Il s'agit donc d'un système d'axes qui se déplace avec le mobile. Les composantes de l'accélération suivant ces axes sont appelées <u>accélération tangentielle</u> et <u>accélération normale</u>.

Soit $\vec{v}$ la vitesse en P et $\vec{v}'$ la vitesse en un point voisin P'. Pendant le temps Δt, la vitesse a subi la variation

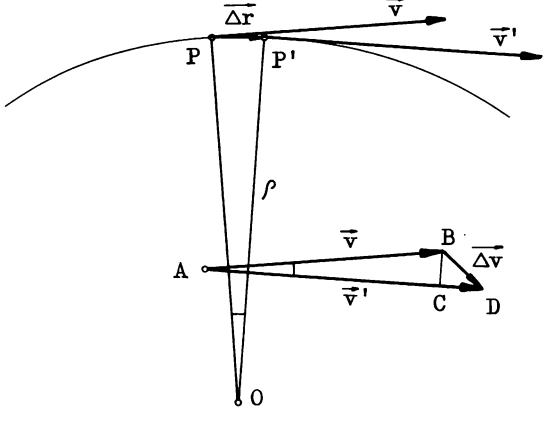
$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}' - \vec{v},$$

et, à un passage à la limite près, l'accélération vaut:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Pour trouver les composantes de $\vec{a}$ suivant les axes choisis, intéressons-nous à celles de $\overrightarrow{\Delta v}$.

Soit O le centre du cercle osculateur à la trajectoire au point P. Plaçons-nous dans le cas où $\|\vec{v}'\| > \|\vec{v}\|$. Considérons le triangle ABC formé par $\vec{v}$ et sa projection sur $\vec{v}'$. Si Δt est très petit, l'angle des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ est très petit et le triangle ABC est pratiquement isocèle en A. Les segments OP et OP' étant respectivement perpendiculaires aux vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}'$, l'angle qu'ils forment est égal à l'angle des vitesses. Les triangles isocèles ABC et OPP' sont semblables, puisqu'ils ont des angles au sommet égaux. Leurs côtés sont proportionnels et on peut écrire:



$$\frac{BC}{AB} = \frac{PP'}{OP}.$$

La composante normale de $\overrightarrow{\Delta v}$ vaut donc:

$$BC = \frac{AB.PP'}{OP} = \frac{v.\|\overrightarrow{\Delta r}\|}{\rho} = \frac{v.v.\Delta t}{\rho}.$$

La composante tangentielle de $\overrightarrow{\Delta v}$ vaut simplement:

$$CD = v' - v = \Delta v.$$

En divisant ces composantes par Δt, on trouve les composantes de l'accélération:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Remarquons que Δv désigne l'accroissement de grandeur de la vitesse pendant l'intervalle Δt. Cet accroissement n'est pas du tout égal à la grandeur de l'accroissement de vitesse. C'est pourquoi il faut distinguer les symboles Δv et $\|\overrightarrow{\Delta v}\|$.

Dans le cas où $\|\vec{v}'\| < \|\vec{v}\|$, la composante tangentielle de $\overrightarrow{\Delta v}$ est négative. Elle vaut donc encore

$$\Delta v = v' - v.$$

Elle est toujours égale à l'accroissement (positif ou négatif) de grandeur de la vitesse.

Si Δt tend vers zéro, le rapport $\Delta v/\Delta t$ tend vers la dérivée de la grandeur de la vitesse: dv/dt.

En résumé, l'accélération tangentielle et l'accélération normale s'expriment par les formules:

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

où v est la grandeur de la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.

L'accélération est définie de manière à rendre compte de toutes les variations du vecteur vitesse. Or la vitesse peut varier en grandeur et en direction. L'accélération tangentielle exprime la rapidité de variation de la grandeur de la vitesse. L'accélération normale exprime la rapidité de variation de la

direction de la vitesse.

Examinons quelques cas particuliers.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne, ρ est infini. L'accélération normale est nulle. L'accélération est donc portée par la trajectoire.

Dans le cas d'un mouvement uniforme non rectiligne, v est fixe et sa dérivée nulle. L'accélération tangentielle est nulle. L'accélération est donc normale à la trajectoire. De plus, la grandeur de l'accélération se confond avec l'accélération normale. L'accélération a donc pour grandeur $a = v^2/\rho$.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme, les deux composantes de l'accélération sont nulles. L'accélération est donc nulle. Il est évident qu'il doit en être ainsi, puisque dans un tel mouvement la vitesse ne varie d'aucune manière.

Considérons encore un mouvement quelconque. Si la vitesse croît, l'accélération tangentielle est positive. L'accélération forme alors avec la vitesse un angle aigu ou nul. Si la vitesse décroît, l'accélération tangentielle est négative. L'accélération et la vitesse forment alors un angle obtus ou plat. On retrouve les résultats du paragraphe précédent.

§ 20 Exemples de calcul

Exemple 1: Un mobile se déplace suivant l'horaire:

$$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t, \quad \text{avec} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \text{ m/s}^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \text{ m/s} \\ 0{,}8 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

Déterminer et représenter graphiquement la trajectoire, la vitesse et l'accélération, dans l'intervalle allant de -3 s à 3 s.

$\triangle\triangle\triangle$ Horaire de la vitesse: $\vec{v} = 3\vec{A}t^2 + \vec{B}$.

Horaire de l'accélération: $\vec{a} = 6\vec{A}t$.

A titre d'exemple, calculons la position, la vitesse et l'accélération à l'heure t = -3 s.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \text{ m/s}^3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-27 \text{ s}^3) + \begin{pmatrix} -0{,}4 \text{ m/s} \\ 0{,}8 \text{ m/s} \end{pmatrix} \cdot (-3 \text{ s}) = \begin{pmatrix} -1{,}5 \text{ m} \\ -2{,}4 \text{ m} \end{pmatrix}.$$

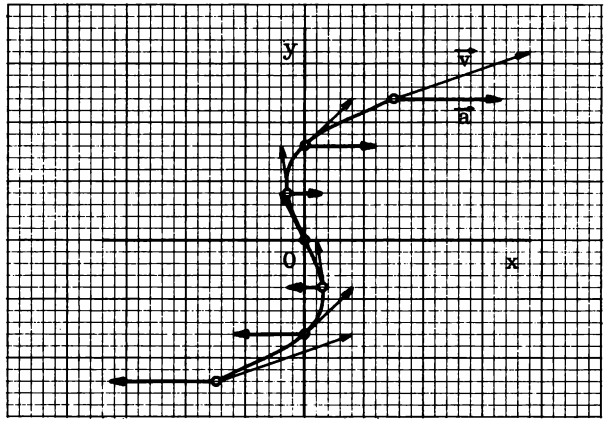
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \text{ m/s}^3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 9 \text{ s}^2 + \begin{pmatrix} -0{,}4 \text{ m/s} \\ 0{,}8 \text{ m/s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}3 \text{ m/s} \\ 0{,}8 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0,6 \text{ m/s}^3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-3 \text{ s}) = \begin{pmatrix} -1,8 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En procédant de la même façon pour les autres dates, on obtient:

t (s)	x (m)	y (m)	v_x (m/s)	v_y (m/s)	a_x (m/s²)	a_y (m/s²)
-3	-1,5	-2,4	2,3	0,8	-1,8	0
-2	0	-1,6	0,8	0,8	-1,2	0
-1	0,3	-0,8	-0,1	0,8	-0,6	0
0	0	0	-0,4	0,8	0	0
1	-0,3	0,8	-0,1	0,8	0,6	0
2	0	1,6	0,8	0,8	1,2	0
3	1,5	2,4	2,3	0,8	1,8	0



Echelles

Longueurs: 1m

Vitesses: 1m/s

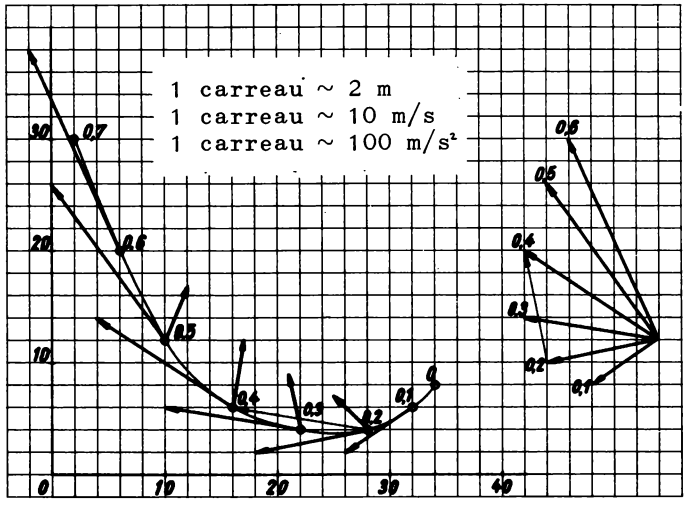
Accélérations: 1m/s²

Exemple 2: Un mobile ponctuel a l'horaire suivant:

Date (s):	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Position (m):	(34;8)	(32;6)	(28;4)	(22;4)	(16;6)
	0,5	0,6	0,7		
	(10;12)	(6;20)	(2;30)		

Faire une représentation graphique de la trajectoire. Déterminer et représenter les vecteurs vitesse et accélération aux divers points. Pour les représentations, on utilisera les correspondances indiquées plus bas.

△△△



A titre d'exemple, calculons la vitesse en t = 0,3 s. Comme vitesse en ce point, adoptons la vitesse moyenne dans l'intervalle allant de 0,2 s à 0,4 s.

$$\Delta t = 0{,}2 \text{ s}, \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \begin{pmatrix} -12 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} -60 \text{ m/s} \\ 10 \text{ m/s} \end{pmatrix}.$$

Avec les conventions adoptées pour représenter les longueurs et les vitesses, on voit que $\overrightarrow{\Delta r}$ et $\overrightarrow{v}$ apparaissent égaux dans la figure. Cela permet de construire immédiatement les vitesses aux autres points et un hodographe.

Calculons maintenant, à titre d'exemple, l'accélération en t = 0,3 s. Prenons comme valeur de cette accélération l'accélération moyenne sur le même intervalle que ci-dessus. L'hodographe faisant immédiatement apparaître $\overrightarrow{\Delta v}$, on a:

$$\Delta t = 0{,}2 \text{ s}, \qquad \overrightarrow{\Delta v} = \begin{pmatrix} -10 \text{ m/s} \\ 50 \text{ m/s} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} -50 \text{ m/s}^2 \\ 250 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}.$$

Etant donné les conventions adoptées, le vecteur qui représente $\vec{a}$ vaut la moitié de celui qui représente $\overrightarrow{\Delta v}$. Grâce à cette constatation, on peut construire immédiatement les autres accélérations.

Exemple 3: Document expérimental. On a photographié en lumière stroboscopique, à une fréquence de 10 par seconde, un objet qui glisse sur un rail à coussin d'air incliné à 2,77°. L'objet étant à la descente, on a enregistré les abscisses suivantes, relativement à un axe Ox parallèle à la piste: 21,6 cm; 22,5; 23,9; 25,8; 28,1; 30,9; 34,1; 37,7; 41,8. Déterminer les vitesses et les accélérations au cours du trajet.

ΔΔΔ Choisissons comme origine du temps l'instant où la première photo a été prise. La différence entre deux abscisses consécutives fournit une approximation valable pour la composante de la vitesse suivant Ox à la date intermédiaire entre celles de ces deux abscisses.

Par exemple: En $t = 0{,}35$ s $\quad v_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0{,}281 \text{ m} - 0{,}258 \text{ m}}{0{,}1 \text{ s}} = 0{,}23 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

De la même manière, la différence entre deux valeurs consécutives de v_x fournit la composante de l'accélération à la date intermédiaire entre celles des deux vitesses.

Par exemple: En $t = 0{,}4$ s $\quad a_x = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{0{,}28 \text{ ms} - 0{,}23 \text{ ms}}{0{,}1 \text{ s}} = 0{,}5 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

L'ensemble des calculs et des résultats peut se résumer dans le tableau suivant:

t	(s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
x	(m)	0,216	0,225	0,239	0,258	0,281	0,309	0,341	0,377	0,418
v_x	(m/s)		0,09	0,14	0,19	0,23	0,28	0,32	0,36	0,41
a_x	(m/s²)			0,5	0,5	0,4	0,5	0,4	0,4	0,5

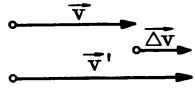
On remarque qu'aux incertitudes d'expérience près, l'accélération est constante. L'accélération moyenne est de 0,46 m/s². Ces résultats seront justifiés théoriquement au paragraphe 43.

Exemple 4: Un constructeur de voitures indique, pour un de ses modèles, les performances suivantes:

de 0 à 80 km/h en 10,0 s,
de 0 à 100 km/h en 16,2 s.

A quelles accélérations cela correspond-il ?

ΔΔΔ Nous supposons la route droite. Ainsi l'accélération est parallèle à la vitesse. Comme la vitesse augmente, l'accélération est orientée vers l'avant, et la grandeur de $\overrightarrow{\Delta v}$ est égale à la différence de grandeur des vecteurs $\vec{v}'$ et $\vec{v}$.



$$\|\overrightarrow{\Delta v}\| = v' - v. \qquad (1)$$

Les renseignements donnés sont équivalents à un horaire de la vitesse, par valeurs discrètes.

t:	0	10,0 s	16,2 s
v:	0	22,2 $\frac{m}{s}$	27,8 $\frac{m}{s}$

(On a transformé les km/h en m/s suivant la méthode:

$$80\ \frac{km}{h} = 80\ \frac{1\ km}{1\ h} = 80\ \frac{1000\ m}{3600\ s} = 22{,}2\ \frac{m}{s}.)$$

La seule chose qu'on puisse faire ici, est de calculer les accélérations moyennes.

La relation $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ implique $a = \frac{\|\overrightarrow{\Delta v}\|}{\Delta t} = \frac{v' - v}{\Delta t}$.

De 0 à 10,0 s: $a = \frac{v' - v}{\Delta t} = \frac{22{,}2\ m/s}{10\ s} = 2{,}22\ m/s^2$.

De 10,0 s à 16,2 s: $a = \frac{v' - v}{\Delta t} = \frac{5{,}6\ m/s}{6{,}2\ s} = 0{,}90\ m/s^2$.

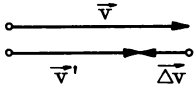
Notons que la relation (1) ne serait pas valable si la trajectoire était courbe, et les vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ non parallèles. A ce propos, on pourra comparer cet exercice avec l'exemple 7*.

Exemple 5: Une luge est lancée à une vitesse de 5 m/s sur une piste horizontale. Par l'effet du frottement, elle subit une accélération de 0,5 m/s^2, dirigée vers l'arrière.

Calculer sa vitesse

a) une seconde plus tard
b) après un parcours d'un mètre.

△△△ Soit $\vec{v}$ la vitesse initiale et $\vec{v}'$ la vitesse cherchée. Elles sont disposées comme l'indique la figure



et $\|\overrightarrow{\Delta v}\| = v - v'$.

D'après la définition de l'accélération, on a:

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{a}.\Delta t \qquad \text{d'où} \qquad \|\overrightarrow{\Delta v}\| = a.\Delta t.$$

On en déduit: $v - v' = a.\Delta t$

et $v' = v - a.\Delta t$.

a) Dans ce cas, il suffit de remplacer les lettres par leurs valeurs.

$$v' = 5\ \frac{m}{s} - 0{,}5\ \frac{m}{s^2} \cdot\ 1\ s = 4{,}5\ \frac{m}{s}.$$

b) Ici, Δt n'est pas connu. On peut toutefois le calculer approximativement en supposant que la vitesse moyenne sur le premier parcours de 1 m n'est pas très différente de 5 m/s. D'après la définition de la vitesse on a:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{v}.\Delta t \qquad \text{d'où} \qquad \|\overrightarrow{\Delta r}\| = v.\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\|\overrightarrow{\Delta r}\|}{v} = \frac{1\ m}{5\ ms^{-1}} = 0{,}2\ s.$$

On en déduit:

$$v' = v - a.\Delta t = 5\ \frac{m}{s} - 0{,}5\ \frac{m}{s^2} \cdot\ 0{,}2\ s = 4{,}9\ \frac{m}{s}.$$

Exemple 6*: Un pendule a une longueur de 2 m. Au point le plus bas de sa trajectoire, il a une vitesse de 1,25 m/s. Quelle est son accélération en ce point ?

$\Delta\Delta\Delta$ Au point le plus bas de la trajectoire, la grandeur de la vitesse passe par un maximum et on a: $dv/dt = 0$. L'accélération tangentielle est donc nulle. Il s'ensuit que l'accélération est normale à la trajectoire. Sa grandeur est alors:

$$a = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1{,}25^2\ m^2 s^{-2}}{2\ m} = 0{,}781\ m/s^2.$$

Exemple 7*: Dans un virage dont le rayon de courbure est de 80 m, une voiture augmente régulièrement sa vitesse. On observe qu'en un point A, elle roule à 40 km/h et qu'en un point B, où elle passe 3 s plus tard, elle roule à 60 km/h.

a) Calculer l'accélération tangentielle et l'accélération normale aux points A et B.

b) Déterminer la grandeur de l'accélération en ces points et l'angle qu'elle forme avec la vitesse.

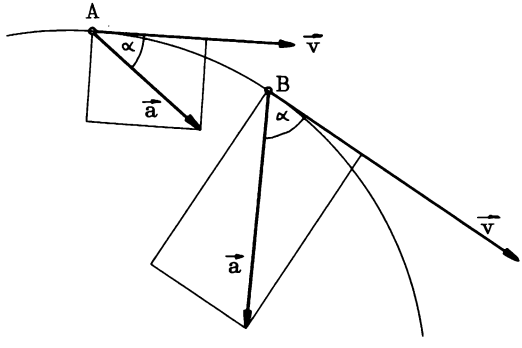
$\Delta\Delta\Delta$ Le fait que la vitesse augmente régulièrement signifie que l'accélération tangentielle est constante. Elle vaut, aussi bien en B qu'en A:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20\ km.h^{-1}}{3\ s} = \frac{5{,}55\ ms^{-1}}{3\ s} = 1{,}85\ \frac{m}{s^2}.$$

L'accélération normale vaut:

en A: $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(11{,}1\ ms^{-1})^2}{80\ m} = 1{,}54\ \frac{m}{s^2}$,

en B: $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(16{,}7\ ms^{-1})^2}{80\ m} = 3{,}47\ \frac{m}{s^2}$.



La grandeur de l'accélération vaut:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

L'angle α qu'elle forme avec la vitesse est déterminé par la condition

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t}.$$

En introduisant les valeurs numériques dans ces formules, on trouve:

en A: $a = 2{,}41\ \frac{m}{s^2}$ $\alpha = 39{,}8^o$

en B: $a = 3{,}93\ \frac{m}{s^2}$ $\alpha = 61{,}9^o$.

Chapitre 5

MOUVEMENTS PARTICULIERS

§ 21 Mouvement rectiligne - Rappels

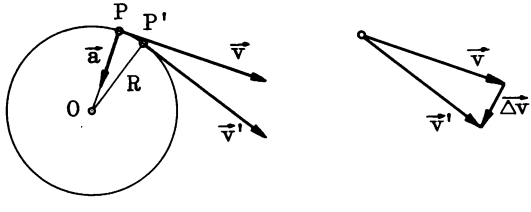
Un point matériel a un mouvement rectiligne s'il se meut sur une droite.

Dans un mouvement rectiligne, la vitesse et l'accélération sont toujours portées par la trajectoire. L'accélération est orientée vers l'avant si la vitesse croît, vers l'arrière si la vitesse décroît.

§ 22 Mouvement circulaire uniforme - Première étude

Un mouvement est circulaire lorsque le mobile se déplace sur un cercle. Il est uniforme lorsque la norme de la vitesse est fixe.

Considérons un mobile se déplaçant à une vitesse de norme fixe v sur un cercle de rayon R. Cherchons à calculer son accélération. Soient P et P' deux points très voisins, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ les vitesses en ces points. Ces vitesses ayant la même norme, le triangle constitué par $\vec{v}$, $\vec{v}'$ et $\overrightarrow{\Delta v}$ est isocèle. Ce triangle est semblable au triangle OPP', car l'angle (OP, OP') est égal à l'angle $(\vec{v}, \vec{v}')$, et deux triangles isocèles ayant des angles au sommet égaux sont semblables. La proportionnalité des côtés permet d'écrire:



$$\frac{\|\overrightarrow{\Delta v}\|}{v} = \frac{PP'}{OP} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\|\overrightarrow{\Delta v}\|}{v} = \frac{\|\overrightarrow{\Delta r}\|}{R}$$

Or le petit espace parcouru PP', qu'on peut désigner par $\|\overrightarrow{\Delta r}\|$, est lié à la vitesse et au temps de parcours par la relation:

$$\|\overrightarrow{\Delta r}\| = v.\Delta t.$$

On en déduit:

$$\|\overrightarrow{\Delta v}\| = \frac{v.\|\overrightarrow{\Delta r}\|}{R} = \frac{v^2 \Delta t}{R} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{\|\overrightarrow{\Delta v}\|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Si l'intervalle Δt est très petit, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont très voisins et $\overrightarrow{\Delta v}$ est pratiquement perpendiculaire à $\vec{v}$. L'accélération, qui est colinéaire à $\overrightarrow{\Delta v}$, est donc perpendiculaire à la vitesse.

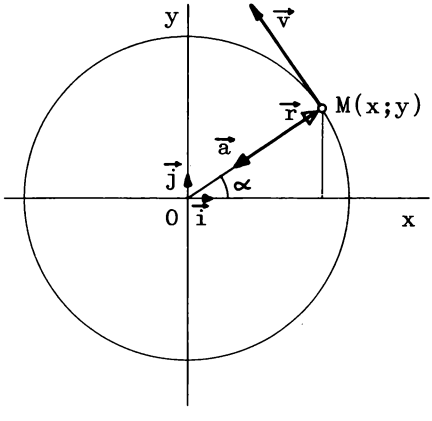
En résumé, dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est toujours dirigée vers le centre du cercle et a pour grandeur:

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}.}$$

Le raisonnement ci-dessus n'est correct qu'à des passages à la limite près. Il confond vitesse avec vitesse moyenne et accélération avec accélération moyenne. Le paragraphe suivant établira les mêmes résultats par un calcul rigoureux.

§ 23* Mouvement circulaire uniforme - Etude analytique

Soit un mobile ponctuel M se déplaçant à une vitesse de grandeur constante v sur un cercle de rayon R. Choisissons le centre du cercle comme origine O du référentiel. Dans le plan du cercle, plaçons un système d'axes orthonormés Ox, Oy de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si le mobile décrit le cercle dans le sens positif, l'angle α, formé par le vecteur position du mobile et le vecteur $\vec{i}$, croît. Admettons que α croît linéairement en fonction du temps. (Nous verrons un peu plus loin, au numéro 1, que cela implique le mouvement uniforme de M). Posons:



$$\alpha = \omega t$$

où ω est une constante. La dérivée de l'angle α par rapport

au temps est égale à ω. Cela vaut à ce paramètre le nom de vitesse angulaire.

Le vecteur position de M peut s'exprimer en fonction de ses composantes (qui sont aussi les coordonnées de M) par la relation:

$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \quad \text{où} \quad x = R\cos\alpha \quad \text{et} \quad y = R\sin\alpha.$$

L'horaire du mobile est donc:

$$\vec{r} = \vec{i}.R\cos\omega t + \vec{j}.R\sin\omega t. \qquad (1)$$

En dérivant cette fonction par rapport au temps, on trouve l'horaire de la vitesse:

$$\vec{v} = -\vec{i}.\omega R\sin\omega t + \vec{j}.\omega R\cos\omega t. \qquad (2)$$

En dérivant cette nouvelle fonction par rapport au temps, on trouve l'horaire de l'accélération:

$$\vec{a} = -\vec{i}.\omega^2 R\cos\omega t - \vec{j}.\omega^2 R\sin\omega t. \qquad (3)$$

Les fonctions (1), (2) et (3) permettent une étude simple des caractéristiques du mouvement.

1. La norme de la vitesse est:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-\omega R\sin\omega t)^2 + (\omega R\cos\omega t)^2}$$

ou

$$\boxed{v = \omega R.} \qquad (4)$$

Cette norme est indépendante du temps. Le mouvement est donc bien uniforme.

2. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ vaut:

$$\vec{r}.\vec{v} = R\cos\omega t.(-\omega R\sin\omega t) + R\sin\omega t.\omega R\cos\omega t = 0.$$

Cela confirme que ces deux vecteurs sont perpendiculaires et que, par conséquent, la vitesse est tangente à la trajectoire.

3. En comparant les fonctions (1) et (3), on voit que

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}. \qquad (5)$$

L'accélération a donc la même direction que le vecteur posi-

tion, mais le sens contraire. En d'autres termes, l'accélération est dirigée vers le centre du cercle.

4. L'égalité (5) implique la relation suivante, entre les grandeurs des vecteurs:

$$\boxed{a = \omega^2 R.}$$

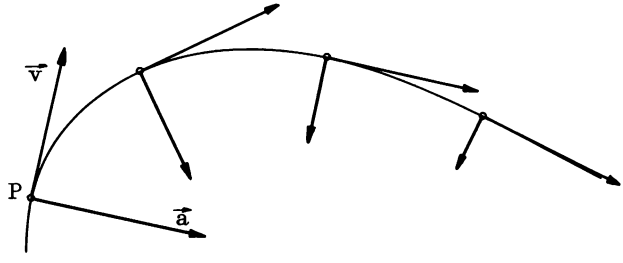
Eliminons ω entre cette égalité et la relation (4). On a successivement:

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad a = \frac{v^2}{R^2}.R \qquad \text{et} \qquad a = \frac{v^2}{R}.$$

Tous les résultats du paragraphe précédent sont retrouvés.

§ 24 Mouvement uniforme quelconque

Considérons un mobile ponctuel M en mouvement uniforme sur



une trajectoire quelconque. Pour tout point P de la courbe, on peut assimiler un petit tronçon de courbe voisin de P à une portion du cercle osculateur en P. Il en résulte que, dans le voisinage de P, le mouvement du mobile sur la courbe est assimilable à un mouvement circulaire uniforme sur le cercle osculateur en P.

On en conclut: dans un mouvement uniforme sur une trajectoire quelconque, l'accélération est dans le plan osculateur à la trajectoire, elle est normale à la trajectoire et sa grandeur est donnée par la relation

$$\boxed{a = \frac{v^2}{\rho}}$$

où v est la grandeur de la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.

Le cas où la trajectoire est rectiligne peut être considéré comme un cas limite. Le rayon de courbure tend vers l'infini, ce qui entraîne a = 0.

Avant de quitter ce sujet, rappelons que dans tout mouvement uniforme, un espace parcouru quelconque s est lié au temps de parcours t et à la grandeur v de la vitesse par la relation

$$\boxed{s = vt.}$$ (Voir § 13.)

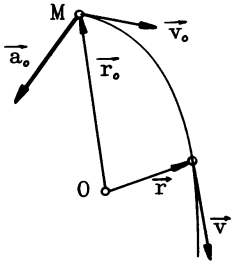
§ 25 Mouvement uniformément accéléré

Définition: Un point matériel a un mouvement uniformément accéléré si son accélération est constante.

Une accélération constante est une accélération qui ne varie ni en grandeur ni en direction.

Les mouvements uniformément accélérés sont fréquents dans la pratique. Ils apparaissent toutes les fois qu'un mobile est sollicité par une force constante, ou par un ensemble de forces constantes. Cela résulte de la loi fondamentale qui sera présentée au chapitre 8.

Cherchons à établir l'horaire d'un point matériel M en mouvement uniformément accéléré. A l'origine du temps, la valeur du vecteur position est désignée par $\vec{r}_o$, celle de la vitesse par $\vec{v}_o$ et celle de l'accélération par $\vec{a}_o$.



L'horaire de l'accélération est

$$\vec{a} = \vec{a}_o,$$

puisqu'à tout instant, l'accélération a la même valeur qu'en t = 0. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on peut écrire:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_o. \qquad (1)$$

Nous avons là une condition sur l'horaire de la vitesse $\vec{v} = g(t)$. Cet horaire doit être tel que sa dérivée soit une

constante égale à $\vec{a}_o$. Les seules fonctions qui satisfont à cette condition sont les fonctions affines de la forme

$$\vec{v} = \vec{c} + \vec{a}_o t, \qquad (2)$$

où $\vec{c}$ est une constante arbitraire. Or il faut qu'à l'heure $t = 0$, la vitesse ait la valeur $\vec{v}_o$. La constante $\vec{c}$ doit donc être égale à $\vec{v}_o$. Nous avons donc trouvé l'horaire de la vitesse:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}_o t.} \qquad (3)$$

Utilisons maintenant le fait que la vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps. L'égalité (3) devient:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o + \vec{a}_o t. \qquad (4)$$

Cette équation impose à l'horaire du mobile, $\vec{r} = f(t)$, la condition d'avoir pour dérivée la fonction affine ci-dessus. Les règles du calcul différentiel indiquent que les seules fonctions satisfaisant à cette condition sont les fonctions quadratiques de la forme

$$\vec{r} = \vec{d} + \vec{v}_o t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_o t^2, \qquad (5)$$

où $\vec{d}$ est une constante arbitraire. En outre, il faut qu'à la date $t = 0$, le vecteur position ait la valeur $\vec{r}_o$. Cela implique: $\vec{d} = \vec{r}_o$. L'horaire du mobile est donc:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_o t^2.} \qquad (6)$$

Ce résultat signifie que si un mobile a un mouvement uniformément accéléré, son horaire est une fonction quadratique du temps:

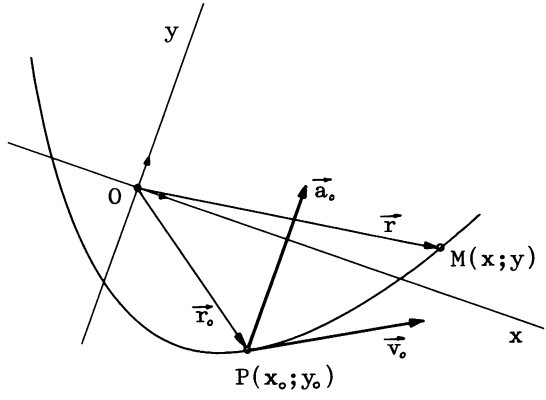
$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}t + \vec{C}t^2.$$

Le terme constant représente la position initiale, le coefficient de t la vitesse initiale, et le coefficient de t^2 la moitié de l'accélération.

Quelle est la <u>forme de la trajectoire</u> d'un mobile uniformément accéléré ? Selon l'étude faite au paragraphe 10, l'horaire

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_o t^2 \qquad (6)$$

correspond à un mouvement plan. La trajectoire est dans un plan déterminé par les deux vecteurs $\vec{v}_o$ et $\vec{a}_o$. Supposons que l'origine O soit choisie dans ce plan. Choisissons-y en outre un axe Oy parallèle à $\vec{a}_o$ et un axe Ox perpendiculaire à Oy. Faisons apparaître les composantes des vecteurs qui entrent dans l'horaire. On peut écrire:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_o = \begin{pmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ a_o \end{pmatrix}.$$

Toute relation linéaire entre des vecteurs implique des relations analogues pour chaque composante. L'équation (6) implique donc:

$$x = x_o + v_{ox}\,t \qquad (6a)$$

$$y = y_o + v_{oy}\,t + \tfrac{1}{2}a_o\,t^2. \qquad (6b)$$

Ce sont les équations paramétriques de la trajectoire. Le paramètre est le temps t. En l'éliminant entre ces deux équations, on obtient l'équation de la trajectoire.

De la relation (6a) on tire: $\quad t = \dfrac{x - x_o}{v_{ox}} \quad$ (si $v_{ox} \neq 0$).

En introduisant cette valeur dans la relation (6b), on obtient

$$y = y_o + v_{oy}\,\frac{x - x_o}{v_{ox}} + \tfrac{1}{2}a_o\,\frac{(x - x_o)^2}{v_{ox}^2}.$$

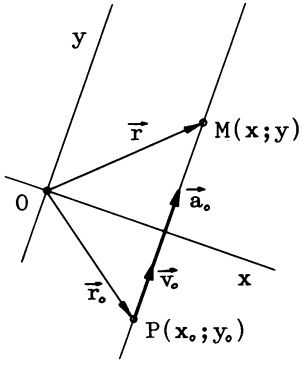
Si on développe cette expression et qu'on l'ordonne suivant les puissances de x, on trouve un trinôme du second degré

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

où les valeurs des constantes A, B et C sont sans importance pour nous. Or on démontre en mathématique qu'une telle relation est l'équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à Oy. On en conclut qu'un mobile uniformément accéléré a pour

trajectoire une parabole dont l'axe est parallèle à l'accélération.

Le cas où la vitesse initiale $\vec{v}_o$ est parallèle à l'accélération doit être traité à part. v_{ox} étant nul, l'élimination de t entre les équations paramétriques est impossible. Mais l'équation (6a) prend la forme



$$x = x_o ,$$

ce qui montre que l'abscisse du mobile est fixe. En d'autres termes, la trajectoire est sur une droite parallèle à la vitesse initiale et à l'accélération.

Ce cas particulier peut être considéré comme le cas limite où la parabole se resserre sur son axe et devient une demi-droite.

§ 26 Exemples de calcul

Exemple 1: Une voiture fait un virage à angle droit. Quelle est son accélération dans le virage si elle met 2 secondes pour décrire un quart de cercle de 5 m de rayon ? On suppose que le tachymètre indique une valeur fixe.

△△△ On a un mouvement circulaire uniforme. La longueur de l'arc décrit (l'espace parcouru) s'exprime en fonction du rayon du cercle par la formule:

$$s = \frac{1}{4} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{2} .$$

D'après la formule s = vt, la vitesse a pour grandeur

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi R}{2t},$$

où t est le temps de parcours. L'accélération a pour grandeur

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\pi^2 R^2}{4t^2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\pi^2 R}{4t^2} = \frac{\pi^2 \cdot 5\ \text{m}}{4 \cdot 4\ \text{s}^2} = 3{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Exemple 2: On donne l'horaire $\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}t + \vec{C}t^2$

avec $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2\ \text{m} \\ 1\ \text{m} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2\ \text{m/s} \\ 3\ \text{m/s} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\ \text{m/s}^2 \end{pmatrix}$.

a) De quel mouvement s'agit-il ?
b) Etablir l'équation de la trajectoire.

△△△ a) L'horaire étant une fonction quadratique du temps, il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

b) De l'horaire, on déduit les équations paramétriques:

$$x = 2\ m - 2\ \frac{m}{s} \cdot t$$

$$y = 1\ m + 3\ \frac{m}{s} \cdot t + 2\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Pour simplifier l'écriture, laissons tomber les unités.

$$x = 2 - 2t$$

$$y = 1 + 3t + 2t^2$$

Eliminons t entre ces équations.

$$t = \frac{2 - x}{2}$$

$$y = 1 + 3.\frac{2 - x}{2} + 2.\frac{4 - 4x + x^2}{4} = 1 + 3 - \frac{3x}{2} + 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$y = 6 - \frac{7x}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Telle est l'équation de la trajectoire (une parabole).

Exemple 3: Un point matériel a une accélération constante. Dans le plan où son mouvement a lieu, on choisit un système d'axes orthonormés. A un moment donné, le mobile passe à l'origine du système. Sa vitesse en ce point a pour composantes -100 m/s et 50 m/s. Son accélération a pour composantes 400 m/s^2 et 0. Etablir l'horaire du mobile. Dessiner sa trajectoire, et représenter sa vitesse et son accélération dans un intervalle de temps de 0,6 s à partir de son passage à l'origine.

△△△ On a un mouvement uniformément accéléré. L'horaire est:

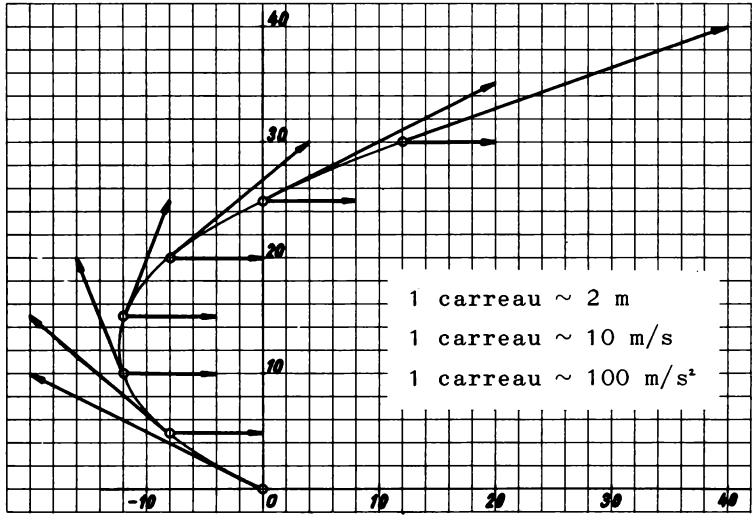
$$\vec{r} = \vec{r_o} + \vec{v_o}\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a_o}\, t^2.$$

Choisissons l'origine du temps à l'instant où le mobile passe à l'origine du système d'axes. D'après la donnée, on a:

$$\vec{r}_o = \vec{0}, \qquad \vec{v}_o = \begin{pmatrix} -100 \text{ m/s} \\ 50 \text{ m/s} \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_o = \begin{pmatrix} 400 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'horaire de la vitesse est: $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}_o\, t$.

Ces horaires permettent de calculer la position et la vitesse aux dates que l'on veut.



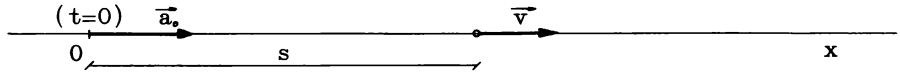
Exemple 4: Une voiture initialement immobile démarre sur une route droite. On suppose que son accélération est constante et a pour grandeur $a = 2$ m/s².
a) Calculer la vitesse acquise après un temps $t = 10$ s.
b) Calculer l'espace parcouru pendant un temps $t = 10$ s.
c) Calculer la vitesse acquise après un parcours de longueur $s = 200$ m.

△△△ Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré. Le mobile a pour horaire:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_o\, t^2.$$

Choisissons l'origine du temps à l'instant de départ et l'origine du référentiel au point de départ. Il s'ensuit $\vec{r}_o = \vec{0}$ et $\vec{v}_o = \vec{0}$. L'horaire du mobile, et celui de la vitesse sont donc:

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}_o\, t^2 \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \vec{a}_o\, t.$$



Projetons les vecteurs sur un axe Ox parallèle à la route et orienté dans le sens de l'accélération. On obtient des équations analogues, mais pour les composantes des vecteurs.

$$x = \tfrac{1}{2} a_o t^2 \qquad \text{et} \qquad v_x = a_o t.$$

La composante de la vitesse suivant l'axe Ox s'identifie ici à la norme de la vitesse. De plus, pour nous aligner sur les symboles utilisés dans la donnée, remplaçons x par s et a_o par a. L'espace parcouru pendant un temps t et la vitesse acquise après un temps t valent donc:

$$s = \tfrac{1}{2} a t^2 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad v = at. \quad (2)$$

Si on élimine t entre les équations (1) et (2), on trouve:

$$s = \tfrac{1}{2} a . \frac{v^2}{a^2}.$$

$$\text{d'où } s = \frac{v^2}{2a} \qquad \text{et} \qquad v = \pm \sqrt{2as}.$$

Comme v représente la norme de la vitesse, seul le signe + doit être retenu. La vitesse acquise après un parcours de longueur s est donc

$$v = \sqrt{2as}. \qquad (3)$$

Les relations (1), (2) et (3) permettent de répondre aux questions posées.

a) L'équation (2) fournit: $v = at = 2 \frac{m}{s^2} . 10 \text{ s} = 20 \frac{m}{s}$.

b) L'équation (1) fournit: $s = \tfrac{1}{2} a t^2 = 1 \frac{m}{s^2} . 100 \text{ s}^2 = 100 \text{ m}$.

c) L'équation (3) fournit: $v = \sqrt{2as} = \sqrt{4 \frac{m}{s^2} . 200 \text{ m}} = 28{,}3 \frac{m}{s}$

$= 102 \frac{km}{h}$.

Exemple 5: Quelle est la distance de freinage d'une voiture roulant à une vitesse de 72 km/h, si son accélération durant

le freinage est de 5 m/s² (accélération dirigée vers l'arrière).

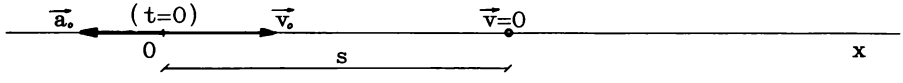
△△△ D'après la donnée, l'accélération est constante. Il s'agit donc d'un mouvement uniformément accéléré. L'horaire est:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2$$

Plaçons l'origine du temps à l'instant où le freinage commence et l'origine du référentiel au point où le freinage commence. Il en résulte: $\vec{r}_0 = \vec{0}$ et $v_0 = 72$ km/h. L'horaire du mobile, et celui de la vitesse sont:

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2 \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\, t.$$

Projetons tous les vecteurs sur un axe parallèle à la route et orienté comme la vitesse.



Les équations ci-dessus entraînent:

$$x = v_0\, t - \tfrac{1}{2}a_0\, t^2 \qquad \text{et} \qquad v_x = v_0 - a_0\, t.$$

Lorsque la voiture s'arrête, on a:

$$v_x = 0, \qquad t = \frac{v_0}{a_0}.$$

$$x = v_0 \cdot \frac{v_0}{a_0} - \tfrac{1}{2}a_0 \cdot \frac{v_0^2}{a_0^2} = \frac{v_0^2}{a_0} - \tfrac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_0} = \tfrac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_0}.$$

La distance de freinage est donc:

$$s = \frac{v_0^2}{2a_0}.$$

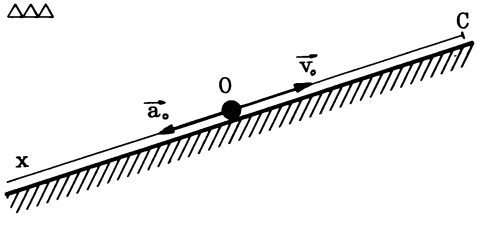
Numériquement, on a: $s = \dfrac{(20\ \text{ms}^{-1})^2}{2.5\ \text{ms}^{-2}} = \dfrac{400\ \text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{10\ \text{ms}^{-2}} = 40$ m.

<u>Exemple 6:</u> Lorsqu'on fait rouler une boule sur un plan incliné, le mouvement est uniformément accéléré, l'accélération dépendant d'ailleurs de l'inclinaison du plan.

On lance une boule le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné, vers le haut, à une vitesse de 12 m/s. L'accélération, qui est dirigée vers le bas, a une grandeur de 4 m/s².

a) Combien la boule met-elle de temps pour atteindre son point culminant ?
b) Combien de temps met-elle pour revenir de ce point à son point de départ ?
c) A quelle vitesse repasse-t-elle au point de départ ?
d) Quelle vitesse a-t-elle lorsqu'elle est 10 m au-dessus de son point de départ ?

△△△



On a un mouvement uniformément accéléré. Choisissons l'origine du temps à l'instant où la boule est lancée et l'origine du référentiel au point de départ. L'horaire prend la forme

$$\vec{r} = \vec{v}_o\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_o\, t^2.$$

L'horaire de la vitesse est:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}_o\, t.$$

Choisissons en outre un axe Ox, le long d'une ligne de plus grande pente, et orienté vers le bas. Par projection sur cet axe, les équations ci-dessus deviennent:

$$x = -v_o\, t + \tfrac{1}{2}a_o\, t^2 \qquad \text{et} \qquad v_x = -v_o + a_o\, t.$$

a) Au point culminant C, on a:

$$v_x = 0, \qquad t = \frac{v_o}{a_o} = \frac{12\ \text{ms}^{-1}}{4\ \text{ms}^{-2}} = 3\ \text{s}.$$

La boule arrive au point C à l'heure t = 3 s. Elle met donc 3 s pour monter jusqu'en ce point.

b) Pour exprimer que la boule est revenue au point de départ, on pose x = 0. On a donc:

$$-v_o\, t + \tfrac{1}{2}a_o\, t^2 = 0, \qquad t(-v_o + \tfrac{1}{2}a_o\, t) = 0.$$

Cette équation en t admet les deux solutions:

t = 0, qui correspond au départ, et

$$t = \frac{2v_o}{a_o} = \frac{2.12\ \text{ms}^{-1}}{4\ \text{ms}^{-2}} = 6\ \text{s},$$

qui correspond au retour au point de départ. Pour redescendre

de C à O, la boule a donc mis un temps égal à 3 s (c'est-à-dire 6 s - 3 s).

c) Introduisons la date t = 6 s dans l'horaire de la vitesse.

$$v_x = -12\ \frac{m}{s} + 4\ \frac{m}{s^2}.6\ s = 12\ \frac{m}{s}.$$

La boule repasse au point de départ à la vitesse de 12 $\frac{m}{s}$.

d) 10 m au-dessus du point de départ, l'abscisse du mobile est x = -10 m. On a donc:

$$-10\ m = -v_o\ t + \tfrac{1}{2}a_o\ t^2.$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs numériques, et laissons momentanément tomber les unités pour simplifier l'écriture.

$$-10 = -12t + 2t^2.$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

Cette équation admet les solutions 1 et 5. La date t = 1 s correspond au passage de la boule montante, la date t = 5 s au passage de la boule descendante. En introduisant ces valeurs dans l'horaire de la vitesse, on trouve:

$$\text{en } t = 1\ s \qquad v_x = -12\ \frac{m}{s} + 4\ \frac{m}{s^2}.1\ s = -8\ \frac{m}{s}.$$

$$\text{en } t = 5\ s \qquad v_x = -12\ \frac{m}{s} + 4\ \frac{m}{s^2}.5\ s = 8\ \frac{m}{s}.$$

Au point considéré, la boule a une vitesse de 8 m/s, orientée vers le haut, ou vers le bas.

Chapitre 6

CHUTE LIBRE

§ 27 Accélération de la pesanteur

Lorsqu'un corps tombe ou est lancé en l'air, son mouvement est plus ou moins influencé par la présence de l'atmosphère. Le frottement de l'air tend toujours à ralentir les mobiles. Pour se débarasser de cette influence, qui dépend de la forme, de la grandeur et de la vitesse de l'objet, comme aussi de l'état de l'atmosphère, on peut observer le mouvement de corps qui tombent dans une chambre à vide. De tels corps sont dits en chute libre.

On peut réaliser par exemple l'expérience du tube de Newton. Divers menus objets - métal, bois, papier, etc. - sont placés dans un tube où l'on fait le vide. Lorsqu'on retourne le tube, on constate que tous les objets restent ensemble en tombant. Cela indique qu'ils ont tous le même horaire, et par conséquent la même vitesse et la même accélération.

De plus, si on étudie l'horaire d'un corps en chute libre, on s'aperçoit que l'accélération est constante.

Ces constatations expérimentales conduisent à énoncer les lois suivantes.

Lois de la chute des corps:

1. Tout corps en chute libre sur la terre a une accélération constante.

2. Cette accélération est la même pour tous les corps.

L'accélération des corps en chute libre est communément appelée accélération de la pesanteur, - parce qu'elle est due à la pesanteur. On la désigne par le vecteur $\vec{g}$. En chaque point de la terre, elle est verticale et orientée vers le bas. Sa grandeur varie légèrement d'un point à un autre. En Suisse et en France, elle est voisine de

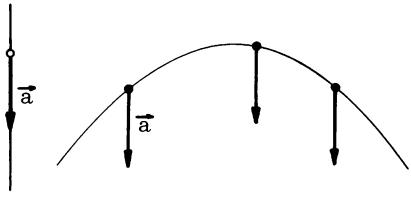
$$g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}.$$

Elle diminue notablement avec l'altitude.

Pour simplifier les calculs, on prend souvent

$$g = 10 \ \frac{m}{s^2}.$$

Un corps en chute libre a donc un mouvement uniformément accéléré. Sa trajectoire est soit une droite verticale soit une parabole d'axe vertical. Son horaire est



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2.$$

L'horaire de sa vitesse est

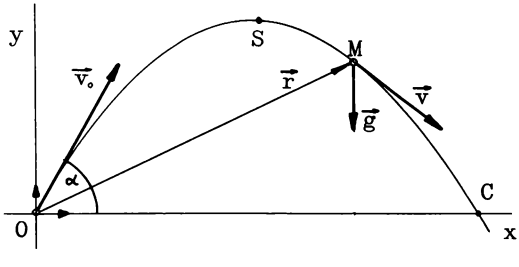
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Sur des corps de grande masse et de petit volume, le frottement de l'air est négligeable, pour autant que la vitesse ne soit pas trop grande. Il est donc possible de réaliser dans l'air des chutes qui sont assimilables à des chutes libres.

§ 28* Balistique

Nous allons considérer quelques problèmes balistiques en supposant que la résistance de l'air sur les projectiles est négligeable. En fait, cette hypothèse ne correspond à la réalité que si on a affaire à des mobiles dont la masse volumique est élevée et dont la vitesse n'est pas trop grande, ou alors à des mouvements qui ont lieu au-dessus de l'atmosphère.

Supposons qu'un projectile soit lancé obliquement depuis le sol. Plaçons l'origine du temps à l'instant du départ. Dans le plan de la trajectoire, plaçons un axe Ox horizontal et un axe Oy vertical, comme l'indique le dessin. Le mouvement étant uniformément accéléré,



l'horaire du mobile et celui de sa vitesse sont:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\, t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{g}t, \qquad (2)$$

où $\vec{r_0}$ est nul d'après le choix des origines. Désignons par α l'angle formé par la vitesse initiale $\vec{v_0}$ avec l'axe Ox. En projetant les vecteurs sur les axes, on obtient:

$$x = v_0 \cos\alpha.t, \qquad (1a) \qquad v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad (2a)$$

$$y = v_0 \sin\alpha.t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad (1b) \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \qquad (2b)$$

Les équations (1a) et (1b) sont les équations paramétriques de la trajectoire. En éliminant entre elles le paramètre t, on trouve l'équation de la trajectoire:

$$y = x\ \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

Les équations ci-dessus permettent de résoudre de petits problèmes de balistique. Voici quelques exemples.

1. Quelles sont les coordonnées du sommet S de la parabole ?

En ce point, on a: $v_y = 0$. Cette condition entraîne:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

En introduisant cette valeur dans les formules (1a) et (1b), on trouve:

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

2. Quelle est la portée du jet ? (La portée est la distance entre le point de départ du projectile et le point où il arrive sur le sol, à supposer que celui-ci soit horizontal).

La portée est déterminée par la condition $y = 0$. L'équation (1b) fournit alors, outre la solution $t = 0$, la valeur

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (1a), on trouve l'abscisse du point de chute C, qui est égale à la portée.

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (4)$$

3. La grandeur de la vitesse initiale étant donnée, quelle est la valeur de l'angle de tir α qui donne la plus grande portée, et quelle est cette portée ?

D'après la formule (4), la portée est maximale lorsque le sinus de 2α prend sa plus grande valeur. Cette valeur est 1. Elle est atteinte si $2\alpha = 90^{\circ}$, c'est-à-dire si

$$\alpha = 45^{\circ}.$$

La portée maximum vaut: $\frac{v_o^2}{g}$.

4. La grandeur de la vitesse initiale étant fixée, quelle valeur faut-il donner à α pour que le projectile atteigne un but B choisi d'avance, dans le plan Ox, Oy. Les coordonnées du but sont (X;Y).

Exigeons que le point B soit sur la trajectoire. Ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation (3).

$$Y = X \operatorname{tg}\alpha - \frac{gX^2}{2v_o^2 \cos^2\alpha}.$$

En utilisant la formule trigonométrique

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha,$$

nous transformons la relation ci-dessus en une équation du second degré en $\operatorname{tg}\alpha$,

$$Y = X \operatorname{tg}\alpha - \frac{gX^2}{2v_o^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha),$$

dont la solution fournit la réponse à la question posée.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_o^2 \pm \sqrt{v_o^4 - 2v_o^2 gY - g^2X^2}}{gX}.$$

Cette équation admet zéro, une ou deux solutions, suivant la valeur du discriminant. Il existe donc des points B(X;Y) inaccessibles, des points accessibles par un angle de tir et des points accessibles par deux angles de tir. Un point est accessible si

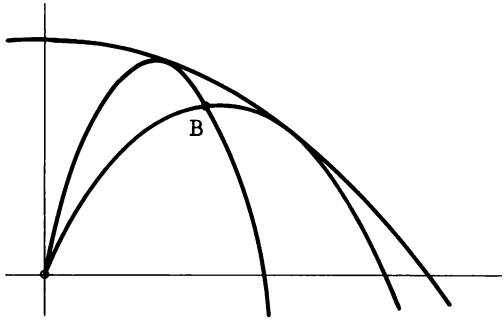
$$v_o^4 - 2v_o^2 gY - g^2X^2 \geq 0.$$

L'ensemble des points satisfaisant à cette condition est un

domaine plan. La frontière de ce domaine a pour équation:

$$v_o^4 - 2v_o^2 gY - g^2X^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad Y = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_o^2}.$$

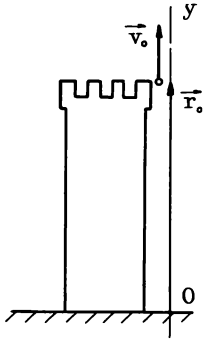
C'est l'équation d'une parabole dont l'axe est vertical et dont le foyer se trouve au point de lancement du projectile. Tout point situé au-dessus de cette parabole ne peut être atteint par le projectile. Pour cette raison, cette ligne est appelée parabole de sûreté. Tout point situé au-dessous de cette parabole peut être atteint par deux angles de tir. Les points de la parabole ne peuvent être atteints que par un seul angle de tir. La parabole de sûreté est l'enveloppe des trajectoires possibles.



§ 29 Exemples de calcul

Exemple 1: Depuis une tour ayant une hauteur de 80 m, un objet est lancé vers le haut à une vitesse de 30 m/s.
a) Quelle hauteur atteint-il ?
b) Quand arrive-t-il au sol ?
c) A quelle vitesse arrive-t-il au sol ?
d) Combien met-il de temps pour franchir les 30 derniers mètres de sa trajectoire ?

△△△



L'horaire du mobile est:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o\, t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2.$$

Celui de sa vitesse est:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t.$$

Choisissons l'origine du temps au moment du départ et l'origine du référentiel au pied de la tour. On a alors:

$$r_o = 80 \text{ m}, \qquad v_o = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Projetons les vecteurs sur un axe vertical Oy orienté vers le haut. Les équations ci-dessus impliquent:

$$y = r_o + v_o\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad v_y = v_o - gt. \quad (2)$$

a) Au point culminant, on a:

$$v_y = 0 \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{v_o}{g}.$$

On en déduit:

$$y = r_o + v_o \frac{v_o}{g} - \tfrac{1}{2}g \frac{v_o^2}{g^2} = r_o + \tfrac{1}{2}\frac{v_o^2}{g} = 80\ \text{m} + 45\ \text{m} = 125\ \text{m}.$$

Le mobile atteint une hauteur de 45 m au-dessus de la tour, de 125 m au-dessus du sol.

b) Au sol, on a:

$$y = 0 \qquad \text{d'où} \qquad r_o + v_o\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0,$$

et

$$gt^2 - 2v_o\, t - 2r_o = 0.$$

On en déduit

$$t = \frac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 + 2gr_o}}{g}, \qquad t_1 = -2\ \text{s}, \qquad t_2 = 8\ \text{s}.$$

La solution t = -2 s est étrangère au problème physique proposé puisque l'horaire ne décrit le mouvement qu'à partir de t = 0. Le mobile arrive donc au sol en t = 8 s, c'est-à-dire 8 secondes après son départ.

c) Introduisons la valeur t = 8 s dans l'horaire de la vitesse. On obtient:

$$v_y = v_o - gt = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8\ \text{s} = -50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Le signe - indique que la vitesse est orientée en sens inverse de l'axe. Elle a une grandeur de 50 m/s.

(Le calcul de v_y peut aussi être fait littéralement. Il donne lieu à une simplification intéressante.)

d) Introduisons la valeur y = 30 m dans l'horaire (1).

$$30\ \text{m} = r_o + v_o\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

En résolvant cette équation comme ci-dessus, on trouve les deux dates

$$t_1 = -1{,}36 \text{ s} \qquad \text{et} \qquad t_2 = 7{,}36 \text{ s}.$$

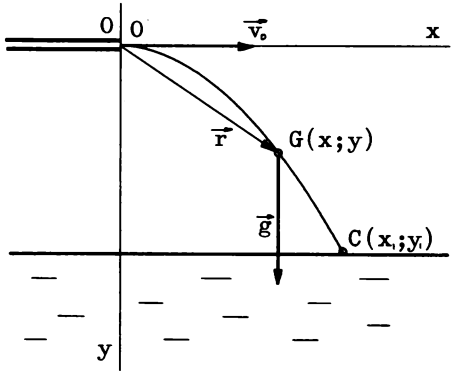
C'est la seconde qui correspond au passage réel du mobile au point envisagé. Le temps qu'il met pour parcourir les 30 derniers mètres est donné par la différence des dates de passage aux extrémités de parcours.

$$\Delta t = 8 \text{ s} - 7{,}36 \text{ s} = 0{,}64 \text{ s}.$$

Exemple 2: Le goulot d'une fontaine est disposé horizontalement 50 cm au-dessus du niveau du bassin. Le jet d'eau atteint le bassin 50 cm en avant de l'orifice du goulot, cette distance étant comptée horizontalement. Calculer la vitesse à laquelle l'eau sort.

△△△ L'horaire d'une goutte d'eau est

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2.$$



Choisissons comme origine du temps l'instant où cette goutte sort du tuyau et comme origine du référentiel l'orifice du tuyau. Il s'ensuit $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Et $\vec{v}_0$ est la vitesse cherchée. Dans le plan de la trajectoire, introduisons un axe horizontal Ox, et un axe vertical orienté vers le bas Oy. Par projection sur ces axes, l'équation ci-dessus fournit:

$$x = v_0\, t, \qquad y = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminons le paramètre t entre ces équations pour obtenir l'équation de la trajectoire. On trouve:

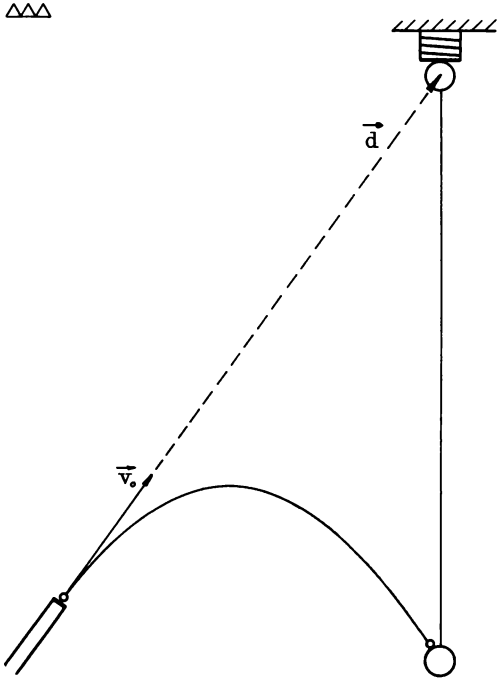
$$y = \tfrac{1}{2}g\,\frac{x^2}{v_0^2},$$

qui est l'équation d'une parabole. Les coordonnées $(x_1;y_1)$ du point de chute C étant connues, il suffit de les introduire dans l'équation de la trajectoire pour pouvoir calculer la vitesse initiale v_0.

$$y_1 = \tfrac{1}{2} g \frac{x_1^2}{v_0^2} \Rightarrow v_0 = x_1 \sqrt{\frac{g}{2y_1}} = 0{,}5 \text{ m } \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ ms}^{-2}}{2.0{,}5 \text{ m}}} = 1{,}56 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Exemple 3: Une sarbacane vise une cible suspendue au plafond par un électro-aimant. Elle éjecte une bille à une vitesse qu'on peut faire varier. Lorsque la bille arrive à l'extrémité du tube, elle ouvre un contact électrique et l'électro-aimant laisse tomber la cible. La bille atteindra-t-elle la cible ?

△△△



Choisissons l'origine du temps à l'instant de départ des deux mobiles et l'origine du référentiel à l'orifice de la sarbacane. Désignons par $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de la bille et par $\vec{d}$ le vecteur position de la cible avant son départ. Les horaires de la bille et de la cible sont respectivement:

$$\vec{r}_1 = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2,$$

$$\vec{r}_2 = \vec{d} + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2.$$

La bille touchera la cible si, pour une valeur positive de t, les vecteurs position $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont égaux, c'est-à-dire si

$$\vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 = \vec{d} + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2$$

ou $$\vec{v}_0 t = \vec{d}. \qquad (1)$$

Or $\vec{v}_0$ et $\vec{d}$ sont parallèles et de même sens, puisque la sarbacane vise la cible. Il existe donc une valeur de t, positive, pour laquelle l'égalité (1) est satisfaite. A cette date, les positions des deux mobiles coïncident. On conclut que la bille atteint invariablement la cible (du moins en théorie). La durée de parcours et le point de rencontre dépendent évidemment de la grandeur de $\vec{v}_0$.

$m, \vec{p}$

Chapitre 7

MASSE ET QUANTITE DE MOUVEMENT

§ 30 Inertie

Nous avons fait observer, au paragraphe 8, la nécessité de préciser le système de référence, ou référentiel, par rapport auquel un mouvement est étudié. Choisissons donc un référentiel lié à la terre et considérons divers mouvements aussi simples que possible. Sous l'influence de l'attraction terrestre, tous les corps tendent à descendre. Cet effet masquant d'autres choses importantes, nous l'éliminons artificiellement en étudiant des mouvements sur un plan horizontal. La surface sur laquelle l'objet se meut exerce un effet qui compense celui de l'attraction terrestre.

Lançons par exemple un chariot sur une surface horizontale. Lorsqu'il est abandonné à lui-même, sa vitesse diminue progressivement et il s'arrête. Ce ralentissement n'est pas une usure naturelle du mouvement, mais il est la conséquence des frottements qui agissent sur le chariot. Moins les frottements sont grands, plus le mouvement dure longtemps. Un mobile se déplaçant sur coussin d'air n'est presque pas freiné. Ces constatations expérimentales conduisent à postuler, comme l'a fait Galilée, la loi fondamentale suivante:

> Loi d'inertie: Un point matériel qui n'est soumis à aucune influence extérieure ne subit aucune variation de vitesse.

Par l'expérience de tous les jours, nous sommes enclins à penser qu'une influence ou une action est nécessaire pour entretenir un mouvement: un cycliste doit pédaler pour avancer à vitesse constante, un moteur de voiture doit tirer pour que la voiture se maintienne à une certaine vitesse, etc. La loi d'inertie affirme au contraire qu'un mouvement s'entretient de lui-même. Si un corps a une vitesse, il la garde, tant qu'aucune influence extérieure n'agit sur lui. En particulier, s'il a une vitesse nulle, il la garde, tant que rien n'agit sur lui pour le mettre en mouvement.

La loi d'inertie implique que si un corps subit une variation

de vitesse, c'est qu'une influence extérieure agit sur lui. A une telle influence, nous donnerons le nom de force.

> Définition qualitative: On appelle force toute cause capable de faire varier la vitesse d'un corps.

- en d'autres termes: toute cause capable de produire une accélération.

Chaque fois que l'on voit la vitesse d'un mobile varier - et elle peut varier en grandeur ou en direction - il est légitime de se demander quelle est la force qui est responsable de cette variation de vitesse.

Les frottements sont des forces. Ils produisent des diminutions de vitesse, - des accélérations orientées vers l'arrière. L'attraction terrestre est une force. Elle donne aux corps en chute libre une accélération $\vec{g}$. L'effet du moteur d'un véhicule s'exprime par une force. Cette force, dite de propulsion, est capable de faire augmenter la vitesse du véhicule. Les muscles exercent des forces. Ils peuvent modifier la vitesse des objets sur lesquels s'exerce leur action.

C'est à cause des frottements que l'action permanente du moteur d'un véhicule est nécessaire pour entretenir une vitesse constante. L'effet de la force de propulsion doit annuler celui de la force de frottement.

§ 31 Référentiels galiléens

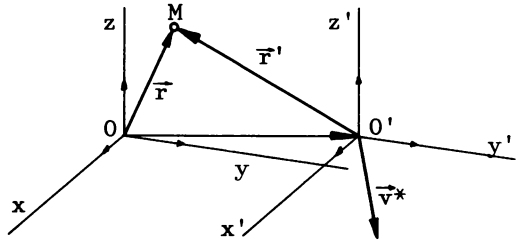
La loi d'inertie est-elle valable pour tout référentiel ?

Lions un référentiel à un trolleybus. Plaçons une boule sur le plancher du véhicule. Nous supposons ce plancher parfaitement horizontal. Lorsque le trolleybus démarre, la boule se met en mouvement en sens inverse, sans qu'aucune force ne s'exerce sur elle. La loi d'inertie est violée. Le lecteur estimera peut-être que c'est normal, puisque le référentiel choisi subit lui-même une accélération (par rapport à la terre). Mais la terre aussi subit des accélérations relativement à d'autres systèmes de référence, en raison de sa rotation sur elle-même et de sa rotation autour du soleil. On peut donc s'attendre à ce que la loi d'inertie ne soit pas rigoureusement valable dans un référentiel lié à la terre. Et il en est bien ainsi. Nous sommes alors conduits à la définition suivante:

> Définition: On appelle référentiel galiléen (ou d'inertie) tout référentiel pour lequel la loi d'inertie est valable.

Un référentiel lié à la terre est galiléen en première approximation.

Soit Oxyz un référentiel galiléen (nous supposons qu'il en existe un), et O'x'y'z' un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au premier. Nous voulons dire par là que, du point de vue du premier référentiel, l'origine du second a une vitesse constante $\vec{v}^*$ et que les axes du second ont des directions fixes. Les vecteurs position $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ d'un mobile quelconque M sont liés par la relation



$$\vec{r} = \overrightarrow{00'} + \vec{r}'. \qquad (1)$$

En dérivant deux fois de suite ces vecteurs par rapport au temps (en physique classique, on suppose qu'il est le même dans tous les référentiels), on obtient:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}' \qquad (2)$$

et

$$\vec{a} = \vec{a}', \qquad (3)$$

puisque $\vec{v}^*$ est constant.

Supposons que le mobile M ne subisse aucune force. D'après la loi d'inertie, qui est valable dans le référentiel galiléen Oxyz, $\vec{v}$ est constant. La relation (2) implique alors que $\vec{v}'$ est constant. Cela veut dire que la loi d'inertie est aussi valable dans le référentiel O'x'y'z', donc que celui-ci est aussi galiléen. On en conclut:

> Si un référentiel est galiléen, tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-ci sont aussi galiléens.

La réciproque est vraie. Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne les uns par rapport aux autres.

Supposons maintenant que le mobile M subisse une force. Cette force engendre une accélération, et la relation (3) montre qu'elle est la même dans les deux systèmes Oxyz et O'x'y'z'.

L'accélération d'un mobile quelconque est la même pour tous les référentiels galiléens.

Tous les référentiels galiléens sont équivalents. Aucun n'est privilégié. Aucun n'est plus immobile que les autres. Il s'ensuit que les lois physiques doivent avoir la même forme dans tous les référentiels galiléens.

D'un point de vue pratique, quels sont les référentiels galiléens qui sont à la disposition du physicien ? Ainsi que nous l'avons dit, les systèmes de référence liés à la terre sont galiléens en première approximation. Il résulte de ce qui précède que tout système de référence en translation rectiligne uniforme par rapport à la terre est aussi galiléen, avec la même approximation. Dans un wagon d'un chemin de fer roulant à vitesse constante (donc sur une voie rectiligne), un observateur lance un objet. Pour cet observateur aussi bien que pour un observateur lié à la terre, l'objet jeté a une accélération $\vec{g}$ et décrit une parabole d'axe vertical (ou éventuellement une droite verticale). Les trajectoires observées ne sont évidemment pas les mêmes, ni les vitesses, mais les accélérations sont les mêmes.

On a une bien meilleure approximation d'un référentiel galiléen en prenant pour origine O le centre du soleil, et pour axes des droites joignant O à des étoiles fixes. Ce système de référence sera appelé "référentiel des étoiles fixes". Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-là est galiléen, avec la même approximation.

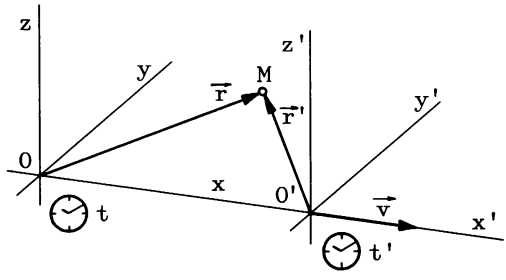
Sauf mention expresse, tous les vecteurs position, toutes les vitesses et toutes les accélérations dont il sera question dans la suite seront relatives à des référentiels galiléens.

§ 32* Transformation de Galilée

Un événement physique est caractérisé par le point où il a lieu, et par l'instant où il se passe, donc par trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps. Chaque observateur caractérise l'événement par quatre coordonnées (x,y,z,t) dépendant du référentiel et de l'horloge choisie. Le problème que nous allons examiner est celui de la transformation de coordonnées. Comment passe-t-on des coordonnées d'un événement dans un référentiel d'inertie aux coordonnées du même événement dans un autre référentiel d'inertie ?

Pour simplifier, prenons deux référentiels dans une position particulière. Supposons que les axes O'x', O'y', O'z' sont respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, et que O' se

déplace à une vitesse constante $\vec{v}$ sur l'axe Ox.



Deux observateurs, immobiles par rapport à chacun de ces référentiels, sont munis d'horloges. Nous supposons qu'avant d'être liées à ces référentiels, les horloges ont été placées quelques temps côte-à-côte, et qu'on a pu constater que dans ces conditions elles indiquaient toujours la même heure. Supposons enfin qu'on les a mises toutes deux à l'heure zéro lorsque les origines des référentiels étaient en coïncidence. Soient (x,y,z,t) les coordonnées d'un événement d'après l'un des observateurs et (x',y',z',t') celles du même événement d'après l'autre observateur. Quelle relation y a-t-il entre ces coordonnées ?

La physique a deux réponses à cette question.

Jusqu'à la fin du 19e siècle, personne n'a douté que l'heure indiquée par les deux horloges soit toujours la même, en dépit du mouvement relatif. On a donc posé

$$t' = t.$$

Ensuite, comme au paragraphe précédent,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{00'},$$

et, puisque O' a un mouvement rectiligne uniforme pour Oxyz,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Par projection sur les axes, on en déduit:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

C'est la tranformation de Galilée.

Au début du 20e siècle, Einstein a montré qu'il fallait abandonner l'idée d'un temps universel, s'écoulant de la même façon pour tous les observateurs. Sa fameuse théorie de la relativité indique que chaque référentiel a son temps propre. Ainsi, deux horloges parfaitement accordées lorsqu'elles subsistent côte-à-côte, cessent de l'être lorsqu'elles sont en mouvement relatif. De même, deux objets identiques lorsqu'ils sont collés l'un contre l'autre ont des longueurs différentes quand ils sont en mouvement relatif. Il résulte de cela qu'il faut remplacer les formules simples ci-dessus par les formules plus compliquées qu'on appelle transformation de Lorentz.

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Ces formules sont données ici à titre de curiosité.

En fait la transformation de Galilée n'est pas complètement fausse. Lorsque la vitesse du second référentiel est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière, les rapports v/c tendent vers zéro et les formules de la transformation de Lorentz tendent vers celles de la transformation de Galilée. En d'autres termes, lorsque les vitesses sont beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière, les durées et les longueurs sont pratiquement indépendantes des observateurs. Or, fort heureusement, la vitesse de la lumière est très grande (300'000 km/s). Pour le plus grand nombre des expériences courantes, on peut donc ignorer la mécanique relativiste et se contenter de la mécanique classique, qui donne une approximation suffisante.

Chacune de ces transformations à ses invariants, c'est-à-dire des quantités qui ne varient pas quand on passe d'un référentiel à l'autre. Dans la transformation de Galilée, l'invariant fondamental est la distance de deux points dans l'espace à trois dimensions. Pour deux points P_1 et P_2 repérés dans les deux référentiels, on a:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Dans la transformation de Lorentz, par contre, l'invariant fondamental est la distance de deux points dans l'espace-temps

à quatre dimensions. On a alors:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 =$$

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2 (t_2' - t_1')^2 .$$

En d'autres termes, la première transformation conserve la norme d'un vecteur espace

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tandis que la seconde conserve la norme d'un quadrivecteur espace-temps

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}.$$

§ 33 Première définition de la masse

On peut réaliser sans peine l'expérience suivante. Une bille d'acier est lancée contre une bille identique, mais immobile. Si le choc est central (c'est-à-dire si le support de la vitesse de la première bille passe par le centre de la seconde), on constate que la première bille est bloquée tandis que la seconde part avec la vitesse qu'avait la première. Les mobiles "échangent" leurs vitesses.

Ce choc très caractéristique, et même spectaculaire, peut servir à fournir une première définition de la masse d'un corps. Une définition qui ne peut pas s'appliquer à tout corps, mais qui rend service en attendant qu'il soit possible de donner une définition générale.

Les deux billes mentionnées ci-dessus sont identiques. Elles ont donc en particulier la même masse, quel que soit le sens qu'on donne à ce mot. Partant de cela, nous pouvons définir l'égalité des masses de deux objets différents. Si un objet est lancé contre un objet immobile et que le résultat de la

collision soit un échange de vitesses, on dit que les deux objets ont la même masse. L'expérience montre que si l'on permute les rôles des objets, le résultat du test est le même. L'expérience montre aussi que si on a trois objets 1, 2 et 3, l'égalité de masse de 1 et 2, et celle de 2 et 3, s'accompagnent toujours de celle de 1 et 3. Cela revient à dire que l'égalité de masse est une relation d'équivalence. Elle partage l'ensemble des objets - pour autant qu'ils se prêtent à cette expérience de choc - en classes de même masse.

On peut choisir un objet quelconque comme étalon, et prendre sa masse comme unité. On peut aussi en fabriquer des copies et, par choc contre l'étalon, contrôler qu'elles ont bien la masse unité.

Conformément au sens courant du mot masse, qui signifie quantité de matière, on postule que si n objets de même masse sont soudés ensemble, la masse de l'objet composé est n fois plus grande que celle de l'un des objets. On peut réaliser ainsi des étalons dont la masse est un multiple de l'unité. On peut réaliser des étalons dont la masse en est un sous-multiple, en partageant un objet en parties de masses égales. On peut ainsi en principe déterminer la masse de n'importe quel objet, pourvu qu'il se prête à l'expérience de choc décrite ici.

A ce sujet, précisons que les chocs qui nous ont servi de base ici doivent être réalisés avec des objets qui ne se déforment pas de façon permanente. En d'autres termes, il doit s'agir de chocs élastiques. Si, par exemple, on envoie une boule de terre glaise contre une boule identique (et donc de même masse), les deux boules se déforment, restent peut-être collées, et il n'y a pas échange de vitesse. Le critère introduit pour définir l'égalité des masses ne peut donc s'appliquer qu'à des objets aptes à effectuer des chocs élastiques.

La masse que mesure une balance n'est, en définitive, pas différente de la masse définie ici. Seulement, le lecteur remarquera que ces deux façons de déterminer la masse reposent sur des propriétés essentiellement différentes. Dans un cas, il s'agit de l'inertie de la matière (expériences de choc); dans l'autre, il s'agit de la pesanteur (balance). Pour cette raison, on distingue la masse inerte de la masse pesante, quoique la théorie de la relativité conduise à identifier ces deux notions.

Nous admettrons provisoirement que la masse m d'un objet déterminé est une quantité fixe, et qu'en particulier elle est indépendante de sa vitesse. Cette hypothèse se trouvera vérifiée pour toutes les vitesses nettement inférieures à la vitesse de la lumière dans le vide (300 000 km/s).

Dans le SI, l'unité de masse est appelée kilogramme (abréviation: kg). C'est la masse du prototype international du kilogramme, un cylindre de platine-iridium déposé au Bureau international des poids et mesures, à Sèvres près de Paris.

Pour les corps homogènes, la masse est proportionnelle au volume. Le rapport de la masse au volume est une quantité constante à laquelle on donne le nom de masse spécifique, ou mieux masse volumique. On désigne celle-ci par ρ.

Substance	Masse volumique
Eau	10^3 kgm^{-3}
Mercure	$13{,}6.10^3$
Fer	$7{,}86.10^3$
Air (0°C)	1,293

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

La masse volumique se mesure en kg/m^3.

§ 34 Quantité de mouvement

Définition: On appelle quantité de mouvement d'un point matériel le produit de sa masse par sa vitesse.

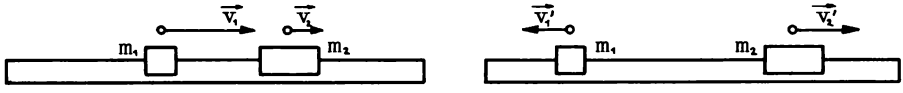
La quantité de mouvement est un vecteur. Elle se désigne par $\vec{p}$ et se mesure en kgm/s.

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

On dit qu'un ensemble de points matériels constitue un système isolé si ces points ne subissent aucune force de la part d'agents extérieurs au système. Un système isolé est une idéalisation. On ne peut jamais soustraire un ensemble de points matériels à toute influence extérieure. Néanmoins, dans beaucoup de cas, les interactions des constituants du système sont tellement plus importantes que les forces qu'ils subissent de l'extérieur, que le système peut pratiquement être considéré comme isolé. C'est le cas en particulier dans les chocs.

On peut réaliser d'intéressantes expériences de choc avec deux wagonnets sur un rail à coussin d'air. Les frottements étant négligeables, les vitesses ne se modifient pratiquement que pendant le choc, de sorte qu'il n'est pas difficile de les mesurer avant et après. Désignons les masses des mobiles par m_1 et m_2, leurs vitesses initiales par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et leurs vitesses

finales par $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$.



L'expérience montre que la quantité de mouvement totale du système n'est pas modifiée par la collision. On a:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'} . \qquad (1)$$

Une façon simple de vérifier cette relation en ne mesurant que deux vitesses est d'envoyer un mobile contre l'autre alors que celui-ci est au repos, en prenant soin que les deux objets restent liés après le choc. Une des vitesses initiales est nulle, et les deux vitesses finales sont les mêmes. La relation (1) devient alors:

$$m_1\vec{v_1} = (m_1 + m_2)\vec{v_1'} .$$

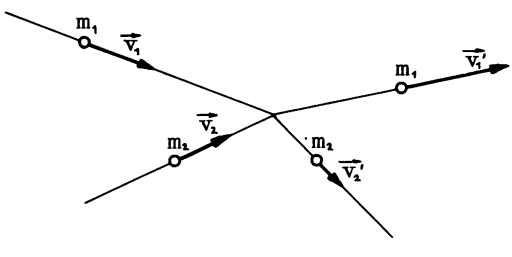
Une autre façon est de réaliser une petite explosion, ou la détente d'un ressort, entre les deux mobiles initialement au repos. On a dans ce cas:

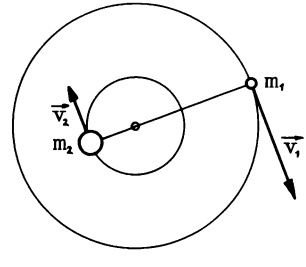
$$m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'} = \vec{0}.$$

Dans le choc particulier utilisé au paragraphe précédent, la quantité de mouvement totale est conservée de façon évidente. Puisque $m_1 = m_2$ et $\vec{v_1} = \vec{v_2'}$, on a

$$m_1\vec{v_1} = m_2\vec{v_2'} .$$

On peut se demander si la relation (1), qui exprime la conservation de la quantité de mouvement totale, n'est valable que dans le cas particulier de chocs entre des objets à l'échelle humaine. L'expérience montre que si l'on attribue des masses convenables aux mobiles, cette loi est d'une validité universelle. On peut l'appliquer aussi bien à des collisions de particules nucléaires, qu'à des systèmes astronomiques tels qu'un astre et ses satellites.





La physique adopte la loi générale suivante, que l'expérience n'a jamais démentie jusqu'à aujourd'hui et qui est valable pour un nombre quelconque de points matériels:

Loi de conservation de la quantité de mouvement:
Dans un système matériel isolé, la quantité de mouvement totale est constante.

$$\sum \vec{p}_i = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Dans le cas particulier où le système isolé ne contient qu'un point matériel, cette loi s'écrit:

$$\vec{p} = \overrightarrow{\text{constante}},$$

ce qui est équivalent à la loi d'inertie.

§ 35* Définition de la masse

La mécanique newtonienne attribue à chaque corps une quantité constante m, appelée masse. Le produit de cette masse par la vitesse est, par définition, la quantité de mouvement. On postule que dans un système isolé la quantité de mouvement totale est constante. En appliquant ce principe à un système de deux corps en interaction, on peut écrire, avec les symboles du paragraphe précédent:

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \qquad (1)$$

ou

$$m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1) = - m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2).$$

Faisons apparaître les variations de vitesse, pour chaque mobile:

$$m_1 \overrightarrow{\Delta v_1} = - m_2 \overrightarrow{\Delta v_2}.$$

En considérant les normes des vecteurs, on a encore:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\|\overrightarrow{\Delta v_2}\|}{\|\overrightarrow{\Delta v_1}\|}. \qquad (2)$$

Cette égalité permet de comparer les masses de deux corps, à partir de mesures sur les variations de leurs vitesses. Si l'une des deux masses est choisie comme unité, l'autre peut être calculée. On peut donc en principe déterminer la masse de tout corps en le faisant interagir avec un corps de masse connue, par exemple en lui faisant effectuer une collision avec lui.

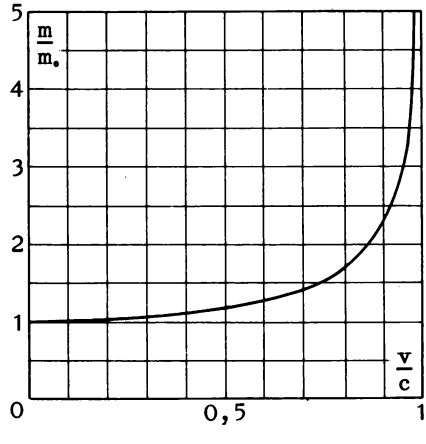
La relation (2) montre que dans l'interaction de deux corps, la masse et la variation de vitesse sont inversement proportionnelles. Si une balle de tennis entre en collision avec un camion, elle subit une grande variation de vitesse, et le camion une très petite. Cela signifie que la masse de la balle est très petite en comparaison de celle du camion. La masse est donc une mesure de l'inertie des corps, c'est-à-dire de leur résistance aux variations de vitesse, ou aux accélérations. Pour cette raison, la masse que nous venons de définir est parfois appelée masse inerte.

Le lecteur remarquera que la relation (1), ou l'une des relations équivalentes, n'est pas simplement une définition de la masse mais aussi une loi physique. Tout d'abord, l'expérience montre que $\overrightarrow{\Delta v_1}$ et $\overrightarrow{\Delta v_2}$ ne sont pas arbitraires, mais sont toujours parallèles, ce qui rend possible l'égalité. Ensuite, une première interaction entre deux corps suffit pour déterminer leurs masses (si l'une est choisie comme unité). Ces masses étant connues, on peut réaliser de nouvelles interactions entre les corps et mesurer les vitesses. L'expérience montre alors que la loi (1) est toujours vérifiée.

Dans la théorie de la relativité, la masse m d'une particule n'est plus une constante. Elle dépend de sa vitesse v selon la relation

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

où m_0 est la masse de la particule au repos et c la vitesse de la lumière dans le vide. Si la vitesse du mobile est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière, le rapport v/c est négligeable, et la masse a pratiquement la valeur m_0. Si la vitesse est très voisine de la vitesse de la lumière, le dénominateur de la fraction est très petit, de sorte que la masse est beaucoup plus grande que m_0. La masse croît donc avec la vitesse et tend vers l'infini quand la vitesse de la particule tend vers celle de la lumière. Cela montre qu'il est impossible d'accélérer une particule jusqu'à la vitesse de la lumière,



et a fortiori au-delà. Dans les accélérateurs tels que ceux du CERN, les particules subissent une phase d'accélération où la vitesse augmente jusqu'à être voisine de c, puis une phase où la vitesse n'augmente pratiquement plus, mais où la masse augmente notablement. Pour des protons de 200 GeV, par exemple, la masse vaut environ 200 fois m_0.

Dans tous les mouvements à l'échelle humaine, et même à l'échelle astronomique, les mobiles ont des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière. Il en résulte que la masse est pratiquement constante et que la mécanique classique constitue une approximation suffisante.

En relativité, la quantité de mouvement d'une particule vaut aussi

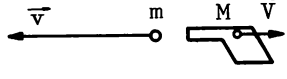
$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Dans les vitesses voisines de celle de la lumière, les augmentations de quantité de mouvement sont imputables aussi bien aux augmentations de masse qu'à celles de vitesse.

§ 36 Exemples de calcul

Exemple 1: Une arme à feu a une masse M. Les projectiles qu'elle tire ont une masse m et une vitesse $\vec{v}$. Calculer la vitesse de recul de l'arme.
Application numérique: M = 600 g, m = 4 g, v = 300 m/s.

△△△ On travaille avec le référentiel dans lequel l'arme est immobile avant l'explosion. On suppose que l'arme et le projectile constituent un système isolé. Initialement la quantité de mouvement du système est nulle. Comme elle se conserve, elle doit être encore nulle après l'explosion. On a donc:



$$m\vec{v} + M\vec{V} = \vec{0},$$

où $\vec{V}$ est la vitesse finale de l'arme. Il en est ainsi pour autant que la quantité de mouvement emportée par les gaz de l'explosion soit négligeable. Il s'ensuit:

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}.$$

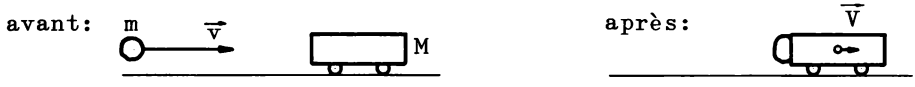
$\vec{V}$ est parallèle à $\vec{v}$, et de sens contraire. C'est une vitesse de recul. Sa grandeur est

$$V = \frac{m}{M}v = \frac{4\ g}{600\ g}.300\ \frac{m}{s} = 2\ \frac{m}{s}.$$

On voit que la vitesse de recul est inversement proportionnelle à la masse de l'arme.

Exemple 2: Une boule de plastiline de 40 g est lancée horizontalement, à une vitesse de 18 m/s, contre un wagonnet de bois de 200 g, initialement immobile, et libre de se mouvoir horizontalement. La boule reste collée au wagonnet. Quelle est la vitesse finale de celui-ci ?

ΔΔΔ La boule et le wagonnet constituent un système pratiquement isolé. La quantité de mouvement se conserve.



En utilisant les lettres définies par la figure, on a:

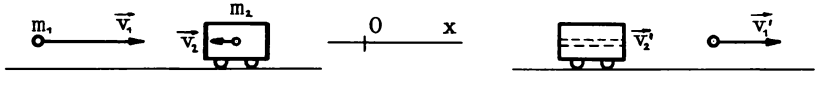
$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V},$$

d'où $$\vec{V} = \frac{m}{m + M}\,\vec{v},$$

et $$V = \frac{m}{m + M}\,v = \frac{40\ g}{240\ g}.18\ \frac{m}{s} = 3\ \frac{m}{s}.$$

Exemple 3: Un petit wagonnet de bois a une masse de 1 kg. Il roule sur une voie horizontale à une vitesse de 1,2 m/s. On lui tire dessus depuis devant avec un fusil. La balle traverse le wagonnet et, sans subir de déviation, suit une trajectoire parallèle à la voie. La balle a une masse de 5 g, une vitesse initiale de 800 m/s et une vitesse finale de 200 m/s. Quelle est la vitesse finale du wagonnet ?

ΔΔΔ Les grandeurs utilisées sont définies par la figure.



Le système balle-wagonnet pouvant être considéré comme isolé, la quantité de mouvement totale se conserve.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'.$$

Projetons les vecteurs sur un axe Ox parallèle à la voie et orienté comme la vitesse initiale de la balle. L'équation ci-dessus entraîne:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_{2x}'$$

(Nous mettons v_{2x}' parce que nous ne savons pas s'il faut mettre v_2' ou $-v_2'$). Il s'ensuit:

$$v_{2x}' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 - m_1 v_1'}{m_2} = \frac{m_1 (v_1 - v_1') - m_2 v_2}{m_2}$$

$$v_{2x}' = \frac{5.10^{-3}\ \text{kg}.(800 - 200)\text{ms}^{-1} - 1\ \text{kg}.1{,}2\ \text{ms}^{-1}}{1\ \text{kg}}$$

$$= \frac{3\ \text{kgms}^{-1} - 1{,}2\ \text{kgms}^{-1}}{1\ \text{kg}} = 1{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Cette composante étant positive, on en conclut que $\vec{v_2'}$ est dans le sens de l'axe Ox. Le wagonnet est donc rejeté en arrière à une vitesse de 1,8 m/s.

Exemple 4*: a) Quelle est l'augmentation de masse d'une particule dont la vitesse vaut le dixième de la vitesse de la lumière ?
b) Quelle est la vitesse d'une particule dont la masse est double de la masse au repos ?

$\Delta\Delta\Delta$ On part de la relation qui donne la masse en fonction de la vitesse.

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (1) \qquad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

a) On a: $\beta = 0{,}1$. Pour les petites valeurs de β, la relation ci-dessus peut être transformée grâce à la formule

$$(1 + x)^n \cong 1 + nx, \qquad \text{valable si } x \ll 1.$$

On a donc:

$$\frac{m}{m_0} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 = 1 + \frac{1}{200} = 1{,}005.$$

La masse augmente de 5 ‰.

b) La relation (1) peut s'écrire: $\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}}$.

On a: $\frac{m_0}{m} = \frac{1}{2}$ et $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 0{,}866.$

La vitesse cherchée est donc: $v = 0{,}866.c = 86{,}6$ % de c.

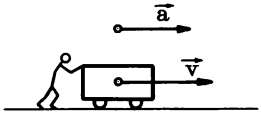
Chapitre 8

FORCES

§ 37 Equation fondamentale de la dynamique

Rappelons que nous avons déjà défini qualitativement la notion de force en disant qu'on appelle ainsi toute cause capable de faire varier la vitesse d'un corps. Maintenant que nous connaissons la notion de quantité de mouvement, nous pouvons tout aussi bien dire: - toute cause capable de faire varier la quantité de mouvement d'un corps.

Considérons un wagonnet roulant sans frottement appréciable sur un plan horizontal. Un homme pousse ce wagonnet de façon à faire augmenter sa vitesse. L'action musculaire de l'homme a droit au nom de force, puisque c'est la cause d'une variation de la quantité de mouvement. Intuitivement nous sentons que cette force musculaire doit être grande si la masse est grande et si l'on veut faire varier rapidement la vitesse, c'est-à-dire produire une grande accélération. Il faut donc définir la force de façon à tenir compte de ces deux éléments.



On peut saisir mathématiquement la rapidité de variation de la quantité de mouvement en dérivant celle-ci par rapport au temps. On a, la masse étant supposée constante:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Or cette dérivée tient justement compte de la masse et de l'accélération. Elle peut nous servir à définir la force. Nous posons donc, en désignant par $\vec{F}$ la force:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.}$$

C'est l'équation fondamentale de la dynamique, ou équation de

Newton.

Cette équation est très importante. En premier lieu, elle sert à définir la force.

> Définition: La force subie par un point matériel est égale à la dérivée de sa quantité de mouvement.

Si l'on a de bonnes raisons pour penser que plusieurs forces s'exercent sur le mobile, la dérivée de la quantité de mouvement fournit la force unique qui est équivalente à l'ensemble de toutes les forces agissantes. Cette force unique est appelée résultante des autres.

En second lieu, si la force subie par un point matériel est connue, par exemple grâce à une expérience précédente, l'équation ci-dessus indique le taux de variation de la quantité de mouvement. Suivant les circonstances, elle permet donc de passer du mouvement aux forces ou des forces au mouvement.

Si la masse du point matériel est constante, et la mécanique de Newton suppose qu'elle l'est, l'équation fondamentale de la dynamique peut se mettre sous la forme (en tenant compte de l'avant-dernière relation):

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Cette forme est très utile pour les applications. D'après cette équation, la force se mesure en kgm/s^2. Cette unité se nomme newton (abréviation: N).

$$1\ N = 1\ kg\ \frac{m}{s^2}$$

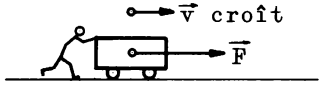
L'équation de Newton implique la loi d'inertie. Si un point matériel ne subit aucune force, on a successivement:

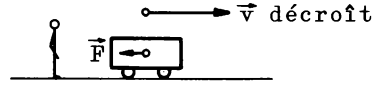
$$\vec{F} = \vec{0}, \qquad \vec{a} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

D'après l'équation de Newton, la force qui s'exerce sur un point matériel (ou la résultante des forces, s'il y en a plusieurs) est toujours parallèle à l'accélération, et de même sens. Selon ce que nous avons étudié concernant la direction de l'accélération, cela signifie en particulier:

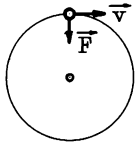
- que dans un mouvement rectiligne, la force est dirigée vers

l'avant si la vitesse croît, et vers l'arrière si la vitesse décroît,





- et que dans un mouvement circulaire uniforme, la force est dirigée vers le centre du cercle. Dans ce cas on l'appelle force centripète. Lorsqu'on fait tourner une pierre attachée au bout d'une ficelle, c'est la ficelle qui exerce la force centripète. Lorsqu'une voiture est dans un virage, la route exerce la force centripète sur les pneus. C'est un cas où une force de frottement est manifestement utile. En l'absence de frottement (route verglacée), la voiture va tout droit, en vertu de la loi d'inertie.



Il est bien évident que l'équation de Newton n'est valable que dans un référentiel d'inertie. Si on passe d'un référentiel d'inertie à un autre, l'accélération est inchangée (§ 31). Il résulte alors de la relation $\vec{F} = m\vec{a}$ que la force qui s'exerce sur un mobile est la même pour tous les observateurs d'inertie.

Lorsque plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ s'exercent simultanément sur un point matériel, leur effet est le même que celui d'une force unique $\vec{F}$, appelée résultante des forces données, et égale à leur somme vectorielle. Cet énoncé constitue la loi de composition des forces.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

Dans la pratique, l'équation de Newton s'utilisera donc sous la forme

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

Le mot "dynamique" vient du mot grec "dunamis" qui signifie "force". La dynamique est l'étude des mouvements en relation avec les forces qui s'exercent sur les mobiles. Elle va donc plus loin que la cinématique, qui n'est qu'une simple description des mouvements.

La relation $\vec{F} = m\vec{a}$, qui suppose une masse constante, n'est

pas valable lorsque la vitesse du mobile est proche de celle de la lumière. En revanche, la relation $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ est valable quelle que soit la vitesse. Elle s'inscrit donc dans le cadre de la théorie de la relativité.

§ 38 Action et réaction

Considérons deux points matériels constituant un système isolé et numérotons-les 1 et 2. D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement, on peut écrire:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

$\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont deux fonctions du temps. Dérivons chaque terme par rapport au temps. L'égalité devient, puisque la dérivée d'une constante est nulle:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{0}.$$

En utilisant la définition de la force, on a:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$\vec{F}_1$ est la force qui s'exerce sur l'objet 1. Les deux objets étant en interaction, mais constituant un système isolé, il est légitime de considérer que $\vec{F}_1$ est exercé par l'objet 2. Nous noterons $\vec{F}_{21}$ la force exercée par l'objet 2 sur l'objet 1, et $\vec{F}_{12}$ la force exercée par l'objet 1 sur l'objet 2. Ainsi, la dernière égalité s'écrit:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.}$$

Ce résultat est établi dans le cas particulier d'un système isolé comprenant deux objets. La physique a de bonnes raisons d'admettre qu'il s'agit là d'un fait général, et elle énonce:

> Loi de l'action et de la réaction: Si un point matériel exerce une force sur un autre, le second exerce sur le premier une force directement opposée.

Toute force exercée par un corps sur un autre peut être appelée action. La force exercée par le second sur le premier est alors la réaction.

Rappelons que deux vecteurs sont dits opposés s'ils ont une somme nulle. Ils ont la même grandeur, la même direction et

le sens contraire. Mais l'action et la réaction ne sont pas simplement opposées, elles sont directement opposées, ce qui veut dire en outre que les vecteurs ont le même support.

L'action et la réaction sont mises en évidence dans beaucoup de situations de la vie courante. Si un cheval tire une charrue, la charrue retient le cheval. Si un cycliste pousse en avant un autre cycliste roulant à côté de lui, il se sent poussé vers l'arrière.

La loi d'inertie, l'équation fondamentale de la dynamique et la loi de l'action et de la réaction sont souvent appelées les trois lois de Newton. Elles constituent la base de la mécanique classique, fondée vers 1667.

§ 39 Pesanteur

Rappelons qu'un objet en chute libre subit une accélération $\vec{g}$, verticale et orientée vers le bas. La cause de cette accélération est l'attraction terrestre. A cette force, nous donnerons le nom de poids.

> Définition: Le poids d'un corps est la force avec laquelle la terre l'attire.

Appliquons l'équation de Newton, sous la forme $\vec{F} = m\vec{a}$, à un objet en chute libre. Dire que la chute est libre, c'est dire qu'à part le poids, aucune force ne s'exerce sur l'objet. La résultante des forces s'identifie donc au poids $\vec{P}$. L'accélération étant $\vec{g}$, on peut écrire:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}.}$$

En fait, l'attraction de la terre sur un objet est indépendante de son état de mouvement. La formule ci-dessus exprime donc le poids d'un corps, même s'il n'est pas en chute libre.

En toute rigueur, la valeur de $\vec{g}$ devrait être mesurée dans un référentiel d'inertie. On ne fait une erreur que de quelques pour mille si on la mesure dans un référentiel lié à la terre. On trouve alors

$$g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2} \cong 10 \ \frac{m}{s^2}.$$

Pour plus de précisions, voir paragraphe 72.

La relation P = mg est utile pour donner une idée intuitive du newton. Si un objet a une masse de 1 kg, son poids vaut

$$P = mg = 1 \text{ kg}.9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}81 \text{ N} \cong 10 \text{ N}.$$

Le poids d'un corps, exprimé en newtons, vaut donc environ 10 fois sa masse, exprimée en kg. Si un objet a une masse de 50 kg, il a un poids d'environ 500 N.

La technique utilise encore une ancienne unité de force: le kilogramme-force (abréviation: kg*) ou kilopond (abréviation: kp). Il est défini comme l'intensité du poids, à Sèvres, du prototype international du kilogramme. C'est approximativement le poids, en n'importe quel point de la terre, d'un objet dont la masse vaut 1 kg. On a donc, d'après le dernier calcul:

$$1 \text{ kp} = 1 \text{ kg*} = 9{,}81 \text{ N} \cong 10 \text{ N}.$$

L'utilité de cette unité est que le poids d'un objet, exprimé en kp, est donné par le même nombre que sa masse, exprimée en kg. Si un objet a une masse de 50 kg, il a un poids de 50 kp. Cette apparente simplification est la source de confusions fréquentes entre la masse et le poids, entre le kp et le kg.

§ 40 Dynamomètre

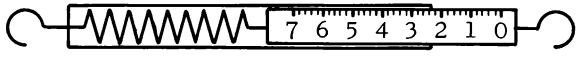
Un ressort tendu exerce une force, à chacune de ses extrémités, sur les objets auxquels il est tenu. Si la masse propre du ressort est négligeable, on peut montrer que ces forces ont la même grandeur. D'après la loi de l'action et de la réaction, elles ont en outre la même grandeur que les forces exercées par les objets sur les extrémités du ressort. Soit F la grandeur commune à toutes ces forces.

La force qu'exerce un ressort est, dans la plupart des cas, proportionnelle à la déformation qu'il subit. En désignant par d la déformation, on peut écrire:

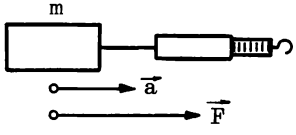
$$F = kd.$$

k est un coefficient de proportionnalité qu'on appelle raideur ou constante du ressort. Il se mesure en N/m.

Cette relation simple entre force et longueur permet de réaliser l'instrument de mesure des forces, le dynamomètre.



Un ressort est logé dans un cylindre et s'allonge lorsque l'instrument est sollicité par des forces. Au lieu de placer une échelle mesurant les déformations, on en réalise une qui indique directement les forces. Pour étalonner le dynamomètre, on peut en principe le fixer à un objet de masse connue m pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal. Par l'intermédiaire du dynamomètre, on exerce sur l'objet une force horizontale qui lui communique une accélération $\vec{a}$ qu'on mesure. Le produit $m\vec{a}$ fournit la valeur de la force $\vec{F}$ exercée par le dynamomètre. La graduation est linéaire si la déformation et la force sont proportionnelles.



La proportionnalité entre la force et la déformation n'est pas une caractéristique exclusive des ressorts. Pour la plupart des corps ou des systèmes élastiques (c'est-à-dire qui reprennent leur forme originale lorsque les sollicitations cessent), la déformation est proportionnelle à la contrainte. La déformation peut être un déplacement rectiligne ou un angle de torsion. La contrainte peut être une force ou un moment (§ 52).

§ 41 Statique du point matériel

Nous dirons qu'un objet est en équilibre s'il existe un référentiel galiléen pour lequel il est constamment immobile.

Lorsqu'on jette un objet verticalement en l'air, il y a un point où il est immobile (pour un référentiel lié à la terre), c'est le point culminant de sa trajectoire. Toutefois l'objet ne reste pas à ce point et n'y est par conséquent pas en équilibre. Il peut donc y avoir immobilité sans qu'il y ait équilibre. Lorsqu'un avion file en ligne droite à vitesse constante relativement à la terre, il est constamment immobile pour un référentiel d'inertie qui a la même vitesse que lui. Bien qu'en mouvement par rapport à la terre, il est en équilibre. Equilibre et immobilité sont donc deux choses distinctes.

Tous les référentiels d'inertie sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Pour un référentiel

d'inertie choisi d'avance, on peut donc dire qu'un objet est en équilibre s'il a une vitesse constante (ou une accélération nulle, ou un mouvement rectiligne uniforme). Comme cas particulier, cette vitesse constante peut être nulle.

L'étude des objets en équilibre est la statique.

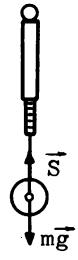
Soient $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ les forces qui s'exercent sur un point matériel en équilibre. L'équation de Newton fournit, puisque l'accélération est nulle:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Condition d'équilibre du point matériel: Si un point matériel est en équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

La réciproque est évidemment vraie.

Comme premier exemple, considérons un objet suspendu à un dynamomètre et immobile à la surface de la terre. Le dynamomètre exerce sur l'objet une force de soutien $\vec{S}$. La terre l'attire avec une force $m\vec{g}$. L'équilibre permet d'écrire:

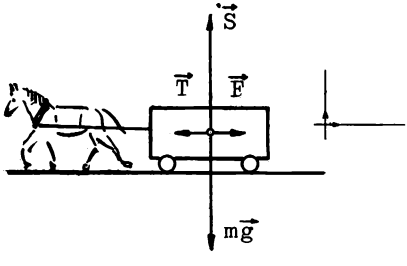


$$\vec{S} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Ces deux vecteurs sont donc opposés. Ils ont la même grandeur. On a:

$$S = mg.$$

On aperçoit ici une autre façon d'étalonner un dynamomètre (comparer § 40). Il suffit de lui suspendre des objets de masse connue. Puisque g est connu, on peut calculer mg. Si l'équilibre est réalisé, la force exercée par le dynamomètre est égale au poids de l'objet. Tout ceci n'est valable que dans la mesure où la terre peut être considérée comme un référentiel d'inertie.



Comme second exemple, considérons un chariot tiré par un cheval, à vitesse constante, sur une route horizontale. L'accélération du mobile étant nulle, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle. Ces forces sont:

le poids $m\vec{g}$, la force de soutien $\vec{S}$ exercée par le sol, la force de traction $\vec{T}$ exercée par le cheval et le frottement $\vec{F}$. On a donc:

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}.$$

En projetant les vecteurs sur un axe horizontal et sur un axe vertical, on déduit de cette équation:

$$-T + F = 0 \qquad \text{et} \qquad -mg + S = 0$$

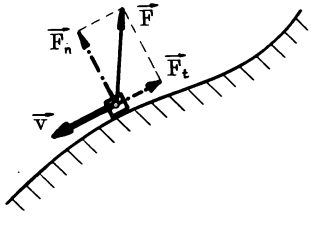
d'où $F = T$ et $S = mg$.

On constate que la force de frottement a la même grandeur que la force de traction. Ce résultat peut surprendre une personne non avertie. Pour des raisons intuitives, l'être humain est enclin à penser que si le chariot avance, la force de traction est plus grande que le frottement. C'est faux, parce que les forces ne sont pas la cause de la vitesse, mais de l'accélération. A une accélération nulle correspond une force nulle (ou une résultante nulle). En d'autres termes, le cheval ne tire pas le chariot pour le faire avancer, mais pour annuler l'effet du frottement qui tend à le ralentir.

S'il arrive que le cheval exerce une force supérieure au frottement, la résultante des forces est différente de zéro et est dirigée vers l'avant. Il en résulte que la vitesse du chariot augmente. Au contraire, si le cheval exerce une force inférieure au frottement, la résultante des forces est dirigée vers l'arrière et la vitesse diminue.

§ 42 Frottement

Lorsqu'un objet glisse ou roule sur une surface, il subit de la part de celle-ci une force $\vec{F}$ qu'on peut décomposer en deux forces $\vec{F_n}$ et $\vec{F_t}$, respectivement normale et tangente à la surface. $\vec{F}$ étant la résultante de $\vec{F_n}$ et $\vec{F_t}$, on peut dire que la surface exerce sur l'objet la force $\vec{F}$, ou bien les deux forces $\vec{F_n}$ et $\vec{F_t}$.



$\vec{F_n}$ a le caractère de <u>force de liaison</u>, car elle prend la grandeur qu'il faut pour que l'objet reste lié à la surface. $\vec{F_t}$ est toujours parallèle à la vitesse et de sens contraire. Elle s'oppose donc au mouvement. C'est la <u>force de frottement</u>.

Définition: On appelle frottement d'une surface sur un mobile la composante tangentielle de la force exercée par la surface sur le mobile.

Il résulte de ceci que si un objet glisse ou roule sans frottement sur une surface, la force $\vec{F}$ qu'elle exerce sur lui est normale.

Le sujet du frottement sera repris et développé au chapitre 11.

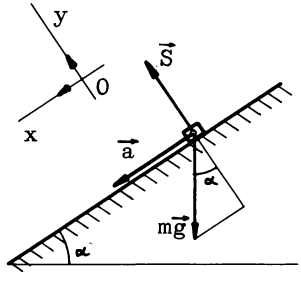
§ 43 Plan incliné

Considérons un point matériel de masse m se déplaçant sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal. Le mobile subit deux forces: son poids $m\vec{g}$ et une force de soutien $\vec{S}$ exercée par le plan. Le frottement étant négligeable, $\vec{S}$ est perpendiculaire au plan. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit ici

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}.$$

L'accélération d'un mobile est toujours dans le plan osculateur à la trajectoire. Dans la situation que nous envisageons maintenant, le mobile se déplace dans le plan incliné. Le plan osculateur à la trajectoire s'identifie en tout point avec le plan incliné. C'est donc dans ce plan qu'est l'accélération.

Choisissons un système d'axes orthonormés Oxyz. Ox est parallèle aux lignes de plus grande pente et orienté vers le bas. Oy est perpendiculaire au plan et orienté vers le haut. Oz est horizontal, dans le plan incliné. En projetant les vecteurs sur les axes, on déduit de l'équation ci-dessus:



$$mg \sin\alpha = ma_x$$

$$-mg \cos\alpha + S = ma_y$$

$$0 = ma_z$$

La dernière égalité fournit: $a_z = 0$. D'autre part, l'accélération étant dans le plan incliné, on a: $a_y = 0$. La norme de l'accélération vaut donc:

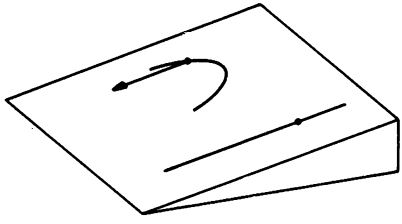
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x^2} = g \sin\alpha.$$

Lorsqu'un point matériel se déplace sans frottement sur un

plan d'inclinaison α, son accélération est parallèle aux lignes de plus grande pente du plan et a pour grandeur

$$a = g \sin\alpha.$$

L'accélération étant constante (en grandeur et en direction), le mobile est uniformément accéléré. Sa trajectoire est soit un arc de parabole soit un segment de droite.



La force de soutien exercée par le plan a pour grandeur

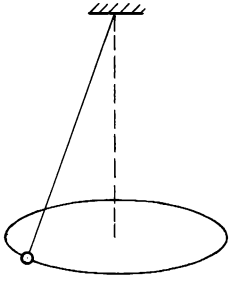
$$S = mg \cos\alpha.$$

Les résultats ci-dessus se vérifient immédiatement dans les deux cas limites:

- plan horizontal: $\alpha = 0$, $a = 0$, $S = mg$.
- plan vertical: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $a = g$, $S = 0$.

§ 44 Pendule conique

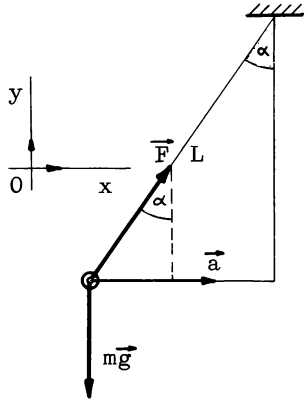
Un corps solide quelconque pouvant osciller autour d'un point ou d'un axe est un pendule physique. Un petit objet attaché à un point fixe par un fil inextensible et de masse négligeable constitue un pendule simple. Nous examinerons deux cas particulier du pendule simple. Si l'objet oscille et décrit un arc de cercle dans un plan vertical, on parle de pendule ordinaire, ou simplement de pendule. Si l'objet décrit un cercle horizontal, on parle de pendule conique, puisque le fil engendre un cône.



Considérons un pendule conique constitué d'un objet de masse m, suspendu à un fil de longueur L et ayant un mouvement circulaire dans un plan horizontal. Soit α l'angle du fil avec la verticale. Cherchons à calculer la période de révolution du pendule.

Deux forces s'exercent sur le mobile: son poids $m\vec{g}$ et la traction du fil $\vec{F}$. Leur résultante se trouve dans le plan vertical contenant le fil. D'après l'équation de Newton, on peut affir-

mer que l'accélération est aussi dans ce plan. Par ailleurs, l'accélération se trouve dans le plan horizontal où le mouvement a lieu. L'accélération est donc portée par l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire qu'elle est dirigée vers le centre du cercle. L'accélération étant normale à la trajectoire, on en conclut que le mouvement est uniforme.



Appliquons au mobile l'équation de Newton.

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Dans le plan vertical contenant le fil, plaçons un axe horizontal orienté comme l'accélération, et un axe vertical orienté vers le haut. Par projection des vecteurs sur ces axes, l'équation ci-dessus permet de déduire les deux équations:

$$F \sin\alpha = ma$$

et

$$F \cos\alpha - mg = 0.$$

On en tire successivement:

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{F \sin\alpha}{m} = \frac{mg \sin\alpha}{m \cos\alpha} = g \operatorname{tg}\alpha.$$

Soit R le rayon de la trajectoire et v la grandeur de la vitesse du mobile. Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération vaut

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

On en déduit: $$v = \sqrt{Ra} = \sqrt{Rg \operatorname{tg}\alpha}.$$

Puisque le mouvement est uniforme, nous pouvons utiliser la relation $s = vt$. Appliquons-la à une révolution complète. L'espace parcouru est $2\pi R$. Le temps de parcours est la période de révolution T. On a donc:

$$2\pi R = vT \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{Rg \operatorname{tg}\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \operatorname{tg}\alpha}}.$$

D'autre part, $$R = L \sin\alpha.$$

On en déduit $T = 2\pi\sqrt{\frac{L\ \sin\alpha}{g\ \mathrm{tg}\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\ \sin\alpha.\cos\alpha}{g\ \sin\alpha}}$

et finalement $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L\ \cos\alpha}{g}}.} \qquad (1)$$

La masse du pendule n'a pas d'influence sur la période. La valeur maximale de la période est atteinte lorsque l'angle α est très petit. Pour les petits angles, on peut confondre $\cos\alpha$ avec 1. La période vaut alors:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (2)$$

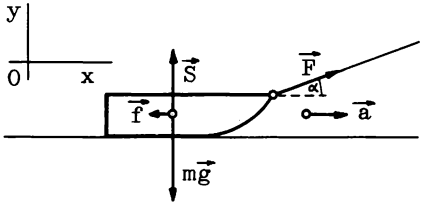
Elle est indépendante de la grandeur de la trajectoire. Ceci peut être mis à profit pour déterminer expérimentalement la valeur de g. En mesurant la durée d'un grand nombre de révolutions successives, on peut, sans se préoccuper de l'amortissement (et par conséquent de la diminution de α) déterminer T avec précision. Il suffit alors de mesurer L pour pouvoir calculer g.

Nous montrerons plus tard que la période du pendule ordinaire s'exprime aussi par la formule (2), lorsque les oscillations ont une faible amplitude.

§ 45 Exemples de calcul

Exemple 1: Une luge a une masse de 30 kg et se trouve sur une piste horizontale. Elle subit une force de frottement de 8 kp. On la tire avec une force de 10 kp dont la direction fait un angle de 20° avec l'horizontale. Calculer son accélération et la force de soutien de la piste.

△△△ La luge subit quatre forces: son poids $m\vec{g}$, une force de traction $\vec{F}$, une force de soutien $\vec{S}$ de la part de la piste, et une force de frottement $\vec{f}$. Appliquons-lui l'équation de Newton.



$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}.$$

L'accélération est parallèle à la piste, le mouvement é-

tant supposé rectiligne. Mais son sens n'est pas connu. Par projection des vecteurs sur les axes, on déduit de l'équation ci-dessus:

$$F \cos\alpha - f = ma_x$$

$$-mg + F \sin\alpha + S = 0$$

d'où $a_x = \frac{F \cos\alpha - f}{m}$ et $S = mg - F \sin\alpha$.

(Le lecteur remarquera que dans la projection de $\vec{a}$, nous n'avons pas pu mettre a ou -a, le sens de $\vec{a}$ étant inconnu.)

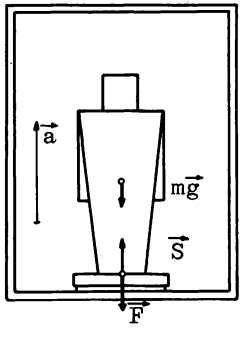
Numériquement, on a: $a_x = \frac{100\ N.0,940 - 80\ N}{30\ kg} = 0,467\ \frac{m}{s^2}$.

La composante a_x étant positive, on conclut que l'accélération est orientée vers l'avant et a une grandeur de 0,467 m/s². On a en outre:

$$S = 30\ kg.10\ \frac{m}{s^2} - 100\ N.0,342 = 266\ N = 26,6\ kp.$$

Exemple 2: Un homme de 60 kg se trouve debout sur une balance à ressort, dans un ascenseur. Lorsque celui-ci se met en mouvement vers le haut, il a une accélération de 2 m/s². Quelle est l'indication de la balance à ce moment ?

△△△ L'homme est sollicité par deux forces: son poids $m\vec{g}$ et une force de soutien $\vec{S}$ exercée par la balance. L'équation de Newton s'écrit, lorsqu'on l'applique à l'homme:



$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}.$$

Dans la situation indiquée, l'accélération est verticale et orientée vers le haut (elle est parallèle à la vitesse et de même sens, puisque celle-ci croît). Par projection sur l'axe Oy, on obtient:

$$-mg + S = ma,$$

d'où $S = m(g + a)$.

Numériquement: $S = 60\ kg(10\ \frac{m}{s^2} + 2\ \frac{m}{s^2}) = 720\ N = 72\ kp.$

La balance indique l'intensité de la force $\vec{S}$ qu'elle exerce sur l'homme (c'est un dynamomètre) ou, ce qui est équivalent, l'intensité de la force $\vec{F}$ que l'homme exerce sur elle. La balance indique, si elle est étalonnée dans les unités SI, 720 N. Il est plus probable qu'elle indique 72 kp, ou même, ce qui est incorrect, 72 kg.

Note: De façon générale, l'équation de Newton

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}$$

et la loi de l'action et de la réaction

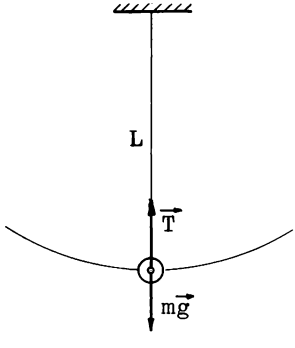
$$\vec{S} = -\vec{F}$$

entraînent $m\vec{g} - \vec{F} = m\vec{a}$ ou $\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{a}$.

Cette relation met en évidence le fait que la force exercée sur le sol par un objet qui est posé sur lui n'est pas toujours égale au poids de l'objet. Elle l'est si l'objet a un mouvement rectiligne uniforme, en particulier s'il est immobile.

Exemple 3: Un pendule est constitué d'une bille de 500 g fixée à un fil de 2 m. Il oscille dans un plan vertical. Lorsque le fil est vertical, il exerce sur la bille une force de 600 ponds (1 pond = 0,001 kp). Quelle est alors la vitesse de la bille ?

△△△ La bille est sollicitée par deux forces: son poids $m\vec{g}$ et la traction du fil $\vec{T}$. L'équation de Newton s'écrit:



$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

Les deux forces étant verticales, l'accélération l'est aussi. Elle est donc normale à la trajectoire. Cela implique qu'au point considéré, le mouvement est assimilable à un mouvement uniforme. (Cela s'explique par le fait que dans cette région, la trajectoire est pratiquement horizontale. La vitesse n'augmente plus et ne diminue pas encore.) L'accélération a donc pour grandeur

$$a = \frac{v^2}{L}.$$

En projetant les vecteurs sur un axe vertical et orienté vers le haut, on obtient (compte tenu de la dernière égalité):

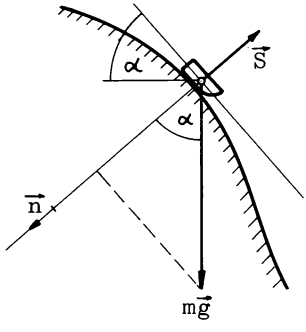
$$-mg + T = m \frac{v^2}{L}.$$

La vitesse de la bille a donc la grandeur:

$$v = \sqrt{\frac{L(T - mg)}{m}} = \sqrt{\frac{2\ m(6N - 0{,}5\ kg.10\ ms^{-2})}{0{,}5\ kg}} = 2\ \frac{m}{s}.$$

Exemple 4*: Une luge glisse sans frottement sur une piste située dans un plan vertical. Sa masse est de 20 kg. En un point, la piste a une inclinaison de 50° et un rayon de courbure de 25 m, la concavité étant du côté neige.
a) La luge passe en ce point à une vitesse de 10 m/s. Calculer la force de soutien exercée par la piste.
b) Quelle condition la vitesse doit-elle satisfaire pour que la luge passe en ce point sans décoller ?

△△△ a) La luge subit deux forces: son poids $m\vec{g}$ et une force de soutien $\vec{S}$, normale à la piste puisqu'il n'y a pas de frottement. L'équation de Newton s'écrit:



$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}.$$

La direction de l'accélération n'est pas simple à trouver, mais nous n'en avons pas besoin. Projetons les vecteurs sur l'axe normal (§ 19). On rappelle que cet axe est perpendiculaire à la trajectoire et orienté vers la concavité.

$$mg \cos\alpha - S = ma_n$$

La composante normale de l'accélération, appelée aussi accélération normale, vaut toujours

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

où ρ est le rayon de courbure. Nous en déduisons:

$$S = mg \cos\alpha - m \frac{v^2}{\rho} = 20\ kg(10 \frac{m}{s^2}.0{,}643 - \frac{100\ m^2\ s^{-2}}{25\ m}) = 48{,}6\ N.$$

On peut remarquer que cette force de soutien est très infé-

rieure au poids. Le résultat littéral montre que si la vitesse augmente, cette force diminue.

b) Dire que la luge ne décolle pas, c'est dire que la piste la soutient toujours. Il faut donc que S soit positif, éventuellement nul. On peut donc écrire:

$$mg \cos\alpha - m \frac{v^2}{\rho} \geq 0,$$

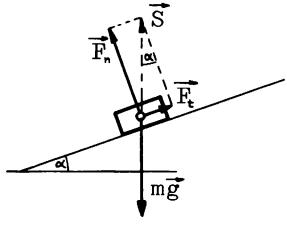
inéquation qu'on peut résoudre par rapport à v.

$$v \leq \sqrt{\rho g \cos\alpha} = 12{,}6 \frac{m}{s}.$$

La vitesse à laquelle la force de soutien s'annule est donc 12,6 m/s. Aux vitesses supérieures, la luge décrit une trajectoire parabolique dans l'atmosphère.

Exemple 5*: Un objet de masse m repose sur un plan d'inclinaison α. Déterminer le frottement du plan.

△△△ On peut considérer que l'objet est sollicité par deux forces: son poids $m\vec{g}$ et la force de soutien $\vec{S}$ du plan. Comme il est en équilibre, ces deux forces sont opposées. La force de soutien peut être décomposée en deux: une force normale et une force tangente à la surface. Cette dernière est, par définition, le frottement. Sa grandeur est



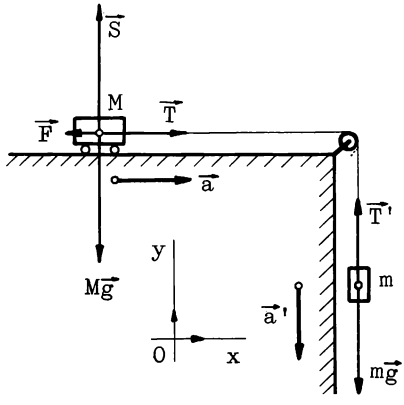
$$F_t = S \sin\alpha = mg \sin\alpha.$$

Exemple 6*: Un wagonnet de masse M roule sur une table horizontale. Il est tiré par un fil parallèle à la table. Le fil passe sur une poulie (dont la masse est négligeable) et est attaché à un contrepoids de masse m, suspendu en l'air. Le wagonnet subit de la part de la table une force de frottement $\vec{F}$. Calculer l'accélération des objets et la force de traction du fil.

△△△ Le wagonnet est sollicité par quatre forces: son poids $M\vec{g}$, la traction du fil $\vec{T}$, une force de soutien $\vec{S}$ et une force de frottement $\vec{F}$. Le contrepoids subit deux forces: son poids $m\vec{g}$ et la traction du fil $\vec{T}'$. L'équation de Newton doit être écrite pour chacun des objets.

$$M\vec{g} + \vec{T} + \vec{S} + \vec{F} = M\vec{a}, \qquad m\vec{g} + \vec{T}' = m\vec{a}'.$$

Les accélérations du wagonnet et du contrepoids sont parallèles aux trajectoires et dirigées comme les vitesses, puisque celles-ci augmentent. Par projection sur les axes, ces équations impliquent



$$T - F = Ma$$

et $$mg - T' = ma'.$$

Les deux objets étant liés par un fil, les distances qu'ils franchissent dans un intervalle de temps donné sont les mêmes. Il s'ensuit que leurs vitesses ont à tout instant la même grandeur. Il en est de même de leurs accélérations. Ainsi, on peut écrire a' = a. Lorsqu'un fil est tendu, les forces qu'il exerce à ses deux extrémités ont la même grandeur. (Cela sera démontré plus tard.) On a donc: T' = T. Les égalités ci-dessus deviennent donc:

$$T - F = Ma$$

$$mg - T = ma.$$

En les additionnant membre-à-membre, on trouve:

$$mg - F = (M + m)a \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{mg - F}{M + m}.$$

Cette valeur de l'accélération se comprend intuitivement. L'accélération subie par les objets est la même que celle qu'aurait un objet de masse totale M + m s'il était sollicité par une force mg qui le tire dans un sens et par une force de grandeur F qui le retienne.

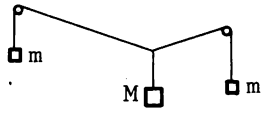
Pour trouver la traction du fil, on introduit la valeur de l'accélération dans l'une des équations contenant T.

$$T = Ma + F = \frac{Mmg - MF}{M + m} + \frac{MF + mF}{M + m} = \frac{Mmg + mF}{M + m}.$$

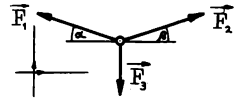
Il est important de remarquer que la traction du fil n'a pas pour grandeur le poids de l'objet suspendu, comme on pourrait avoir tendance à le penser. Ce n'est que dans le cas particulier où l'accélération est très faible qu'il en est approxi-

mativement ainsi. En effet, dans ce cas, $m\vec{g}$ et $\vec{T}'$ ont à peu près la même grandeur puisque le contrepoids est presque en mouvement rectiligne uniforme.

Exemple 7*: Deux objets de masse m et un objet de masse M sont liés par des fils et des poulies comme l'indique la figure ci-contre. Déterminer les angles faits par les fils supérieurs avec l'horizontale lorsque le système est en équilibre.
Application numérique: m = 10 kg, M = 1 kg.



△△△ Etudions l'équilibre du noeud et les forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ qui s'exercent sur lui. Comme le système est en équilibre, les fils exercent sur les objets suspendus des forces ayant la même grandeur que les poids de ces objets. Il en résulte que les forces s'exerçant sur le noeud ont pour grandeurs respectives mg, mg et Mg. D'autre part, on peut écrire:



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

et par projection sur les axes:

$$-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = 0$$

$$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta - F_3 = 0.$$

Compte tenu de ce qui a été établi concernant les grandeurs des forces, on a:

$$-mg \cos\alpha + mg \cos\beta = 0$$

$$mg \sin\alpha + mg \sin\beta - Mg = 0.$$

La première équation entraîne $\cos\alpha = \cos\beta$, et comme il s'agit d'angles aigus, $\alpha = \beta$. La seconde équation devient alors:

$$2mg \sin\alpha = Mg$$

d'où $$\sin\alpha = \frac{M}{2m}.$$

Numériquement, on a: $\sin\alpha = \frac{1\ kg}{20\ kg} = 0,05$ et $\alpha = 2,87^o$.

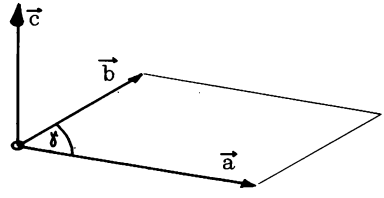
Les deux fils supérieurs ont donc une inclinaison de $2,87^o$.

Chapitre 9

STATIQUE DES SOLIDES

§ 46 Produit vectoriel

A un couple de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on peut faire correspondre un vecteur $\vec{c}$ par la loi de composition appelée multiplication vectorielle.



$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$$

$\vec{c}$ est défini de la façon suivante:

- Sa direction est perpendiculaire au plan déterminé par les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

- Son sens est fixé par la règle dite du tire-bouchon. On considère la plus petite rotation qui amène le premier vecteur à recouvrir le second. On fait subir cette rotation à la poignée d'un tire-bouchon dont la vis a la direction de $\vec{c}$. Le sens dans lequel l'instrument avance est celui qu'on attribue à $\vec{c}$.

- Sa norme est égale au produit des normes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et du sinus du plus petit angle positif déterminé par ces vecteurs.

$$c = a.b.\sin\gamma.$$

Dans le cas particulier où les deux facteurs sont parallèles, la direction du produit est indéterminée. Mais la norme de celui-ci est alors nulle. Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est donc le vecteur nul.

On peut vérifier les propriétés suivantes:

1. La norme du produit est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les facteurs.

2. L'opération est anticommutative. Elle n'est pas associative. Par contre, elle est distributive par rapport à l'addition.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a}. \qquad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}.$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}. \qquad (\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}.$$

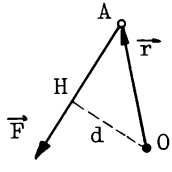
§ 47 Moment d'une force

Etant donné un point origine O, on peut faire correspondre à toute force $\vec{F}$ un vecteur qu'on appelle son moment.

> Définition: Le moment d'une force est le produit vectoriel du vecteur position de son point d'application par la force elle-même.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}.}$$

Soient A le point d'application de la force et H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le support de la force. En utilisant la relation de Chasles, la distributivité du produit vectoriel et le fait que $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires, on peut écrire:



$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{F} =$$

$$= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}.$$

La grandeur du moment vaut donc:

$$M = OH.F.\sin 90^{o} = OH.F.$$

Ce calcul conduit à la définition et au théorème suivants:

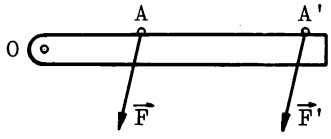
> Définition: On appelle bras de levier d'une force par rapport à un point la distance de ce point au support de la force.

> Théorème: La grandeur du moment d'une force est égale au produit de la grandeur de cette force par son bras de levier.

En désignant le bras de levier par d, on a:

$$\boxed{M = Fd.}$$

La suite du cours montrera que les moments des forces sont en relation avec leur efficacité dans les rotations des objets (§ 49). Deux forces égales $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ appliquées sur un corps en des points A et A' différents peuvent avoir des effets très différents. Celle qui a le plus grand moment, relativement à un point de rotation d'un corps, est celle qui tend le plus efficacement à le faire tourner.



§ 48 Forces intérieures et extérieures

Un ensemble quelconque mais bien défini de points matériels constitue un système matériel.

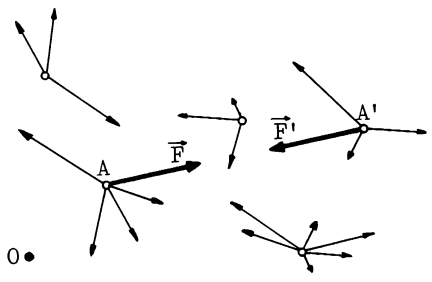
Un système matériel étant donné, on distingue deux catégories de forces. Celles qui sont exercées par des points du système sur d'autres sont appelées forces intérieures. Celles qui sont exercées par un agent extérieur sur des points du système sont appelées forces extérieures.

Pour illustrer ces notions, considérons l'exemple d'un homme debout sur un tabouret. Les forces exercées par les pieds de l'homme sur le tabouret sont-elles intérieures ou extérieures ? La réponse à donner dépend du système matériel qu'on veut considérer. Relativement au système "homme-tabouret", ce sont des forces intérieures, relativement au système "tabouret" elles sont extérieures et relativement au système "homme" elles ne sont ni intérieures ni extérieures.

Si on additionne toutes les forces intérieures apparaissant dans un système, on trouve toujours zéro. En effet, d'après le principe de l'action et de la réaction, à chaque force correspond une force opposée. Les réactions des forces intérieures sont des forces intérieures. Par conséquent, les forces intérieures peuvent être groupées par paires de forces opposées. Leur somme est donc nulle.

> Premier théorème des forces intérieures: Dans tout système matériel, la somme des forces intérieures est nulle.

Il y a plus. Considérons une paire de forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, appliquées en des points A et A' et liées par la loi de l'action et de la réaction. Calculons la somme de leurs moments.



$$\vec{M} + \vec{M}' = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OA}' \wedge \vec{F}' =$$

$$= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA}') \wedge \vec{F}' =$$

$$= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}' + \overrightarrow{AA}' \wedge \vec{F}' =$$

$$= \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F} + \vec{F}') + \overrightarrow{AA}' \wedge \vec{F}' = \vec{0},$$

puisque $\vec{F} + \vec{F}'$ est nul et $\overrightarrow{AA}'$ colinéaire à $\vec{F}'$.

Toutes les forces intérieures pouvant être groupées par paires contenant une action et une réaction, et la somme des moments de chaque paire étant nulle, on conclut:

> Second théorème des forces intérieures: Dans tout système matériel, la somme des moments des forces intérieures est nulle.

Que le système soit solide, liquide ou gazeux, qu'il soit en équilibre ou non, ces théorèmes sont toujours valables.

Les forces extérieures ne jouissent pas des mêmes propriétés, car leurs réactions s'appliquent à des points qui n'appartiennent pas au système. La somme des forces extérieures ne contient aucune paire action-réaction.

Les forces extérieures qui s'exercent sur un système sont communément appelées, quand aucune confusion n'est à craindre: les forces qui s'exercent sur le système.

§ 49 Conditions d'équilibre

Nous définissons l'équilibre comme au paragraphe 41. Un objet est en équilibre s'il existe un référentiel galiléen pour lequel il est constamment immobile.

Soit un corps quelconque (n'importe quel système matériel) en équilibre. On peut le considérer comme un agglomérat de points matériels en équilibre. Numérotons ceux-ci: 1, 2, ..., n. Appelons $\vec{F}_i$ la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le i-ème point et $\vec{f}_i$ la somme des forces intérieures qui s'exercent sur ce point. En raison de l'équilibre, la somme de toutes les forces - extérieures et intérieures - qui s'exercent sur chaque point est nulle. On peut donc écrire:

$$(1) \qquad \vec{F}_i + \vec{f}_i = \vec{0}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Additionnons toutes ces égalités membre-à-membre et groupons les termes de même catégorie.

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i = \vec{0}.$$

La somme des $\vec{F}_i$, étendue à tous les points du système, représente la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le système. La seconde somme représente la somme des forces intérieures. Or celle-ci est toujours nulle. On peut en conclure que la première somme est nulle. Nous constatons donc que si un objet est en équilibre, la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

> Première condition d'équilibre: Si un corps est en équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0}.}$$

Allons plus loin. Désignons par $\vec{r}_i$ le vecteur position du i-ème point matériel. Pour chaque valeur de i, multiplions vectoriellement par $\vec{r}_i$ les deux membres de l'équation (1). On a:

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i = \vec{0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Additionnons membre-à-membre ces n équations.

$$\sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i = \vec{0}.$$

La seconde somme est la somme des moments de toutes les forces intérieures. Elle est nulle. Il en résulte que la première somme, qui est la somme des moments des forces extérieures, est nulle aussi.

> Seconde condition d'équilibre: Si un corps est en équilibre, la somme des moments des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

En désignant ces moments par $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, ..., $\vec{M}_n$, on peut écrire:

$$\boxed{\sum \vec{M}_i = \vec{0}.}$$

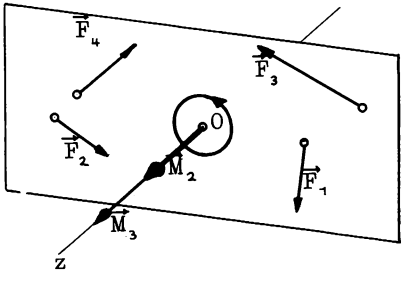
La seconde condition est parfois appelée règle des moments. Elle est vraie quel que soit le point par rapport auquel on considère les moments.

Etablir l'inventaire des forces extérieures qui s'exercent sur un corps est souvent facile. Par contre, les forces intérieures sont en général si complexes qu'il est presque impossible de les inventorier. Les deux théorèmes que nous venons d'établir ont ceci de remarquable, qu'ils permettent d'étudier l'équilibre d'un corps sans qu'il soit nécessaire de prendre en considération les forces intérieures.

Les réciproques des conditions d'équilibre ne sont pas vraies. Lorsqu'une toupie tourne sur le plancher, la somme des forces qui s'exercent sur elle et la somme de leurs moments sont nulles, mais la toupie n'est pas en équilibre. Un référentiel lié à elle n'est pas galiléen. Ainsi, les conditions d'équilibre sont nécessaires, mais non suffisantes.

$$\text{Equilibre} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M}_i = \vec{0}. \right)$$

Soit un corps en équilibre sous l'influence d'un ensemble de forces coplanaires. Considérons les moments de ces forces relativement à un point O du plan où elles se trouvent. Tous ces moments ont la même direction, puisqu'ils sont perpendiculaires au même plan. Introduisons un axe Oz ayant la direction des moments et un sens arbitraire. La seconde condition d'équilibre implique la relation suivante, entre les composantes des moments relativement à cet axe:



$$\sum M_{iz} = 0.$$

Les composantes M_{iz} sont égales aux normes des moments ou à l'opposé de ces normes, suivant que les vecteurs moments sont dans le sens de l'axe ou dans le sens contraire. Or on peut remarquer que la composante d'un moment est positive lorsque la force correspondante tend à faire tourner le corps dans le sens positif autour de l'axe et qu'elle est négative lorsque la force tend à faire tourner le corps dans le sens négatif. La somme des composantes des moments étant nulle, la somme des termes positifs est égale, en valeur absolue, à la somme des termes négatifs. La seconde condition peut donc s'énoncer sous la forme scalaire suivante:

Si un corps est en équilibre, la somme des grandeurs des moments qui tendent à le faire tourner dans un sens est égale à la somme des grandeurs des moments qui tendent à le faire tourner dans l'autre sens.

Symboliquement, on peut écrire:

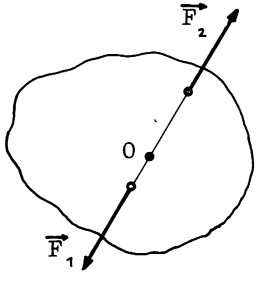
$$\sum M_i^{\circlearrowright} = \sum M_i^{\circlearrowleft}.$$

Cette forme de la seconde condition d'équilibre est très commode dans les applications pratiques. Bien entendu, on ne peut l'utiliser que lorsque les forces sont coplanaires.

Conformément à ce qui a été dit à la fin du paragraphe 47, on voit que les effets de rotation sont à attribuer aux moments des forces plus qu'aux forces elles-mêmes.

§ 50 Applications des conditions d'équilibre

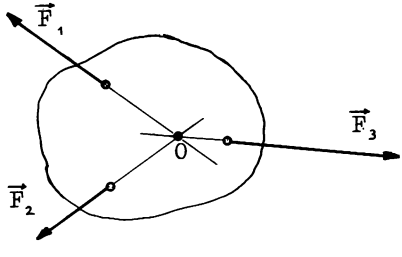
1. Si un corps sollicité par deux forces est en équilibre, les deux conditions s'écrivent



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}.$$

La première égalité signifie que les deux forces sont opposées. Choisissons l'origine sur le support de $\vec{F}_1$. Le moment $\vec{M}_1$ est nul. La seconde égalité implique alors $\vec{M}_2 = \vec{0}$. Or le moment d'une force non nulle ne peut être nul que si le support de la force passe par l'origine. Le support de $\vec{F}_2$ passe donc par O. On en conclut:

Si un corps est en équilibre sous l'influence de deux forces, celles-ci sont directement opposées.



2. Considérons un corps sollicité par trois forces non parallèles, et en équilibre. On peut écrire:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

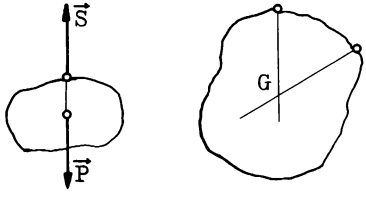
et $$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{0}.$$

La première équation montre

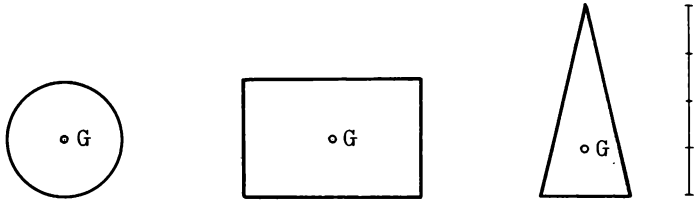
que les forces sont coplanaires (trois vecteurs linéairement dépendants). Plaçons l'origine au point d'intersection des supports de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. Les deux premiers moments sont nuls. D'après la seconde équation, le troisième moment est nul aussi, ce qui implique que le support de $\vec{F}_3$ passe par l'origine. On conclut:

> Si un corps est en équilibre sous l'influence de trois forces non parallèles, les supports de ces forces sont concourants.

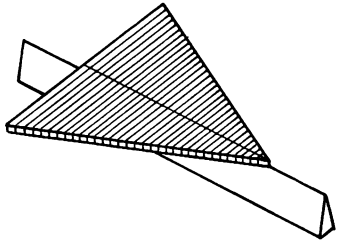
3. Qu'est-ce que le poids d'un corps étendu ? En fait, chaque particule constituant le corps subit l'attraction de la terre. Le poids du corps est la somme des poids de ses particules. Mais on peut se demander en quel point s'applique ce poids total. Supposons qu'on ait affaire à un corps rigide. Si on le suspend par un de ses points, et qu'on l'immobilise, on peut considérer qu'il ne subit que deux forces: son poids et une force de soutien. D'après ce qui précède, ces deux forces doivent être directement opposées. Le poids doit donc être considéré comme appliqué en un point de la verticale passant par le point d'attache. On peut suspendre le corps par d'autres points. L'expérience montre que les verticales passant par les points d'attache, dans ces diverses situations, se coupent toutes en un même point G. C'est le point d'application du poids. On l'appelle <u>centre de gravité</u> de l'objet. On peut démontrer qu'il coïncide avec le <u>barycentre</u> ou <u>centre de masse</u> qui sera défini plus loin.

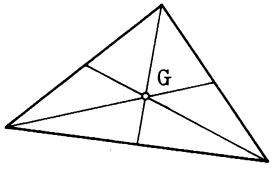


Dans les corps homogènes possédant un centre de symétrie (sphère, cylindre, cube, parallélipipède, etc) le centre de gravité coïncide avec le centre de symétrie. Dans un cône ou une pyramide, la distance du centre de gravité à la base est égale au quart de la hauteur du corps.

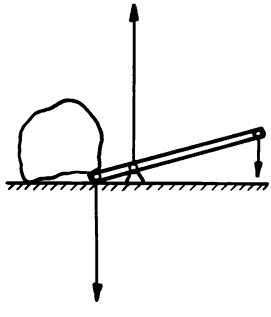


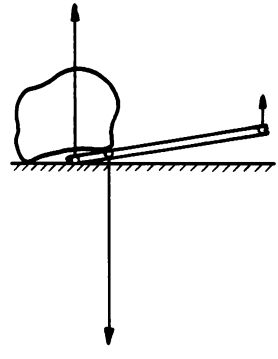
4. Une méthode analogue peut nous conduire à trouver sans calcul la position du centre de gravité d'une plaque triangulaire. On suppose la plaque coupée en tranches, parallèlement à un côté. Le centre de gravité de chaque tranche se trouve en son milieu. On peut donc mettre l'ensemble des tranches, ou la plaque elle-même, en équilibre sur une lame de couteau horizontale, pourvu qu'elle suive les centres des tranches, c'est-à-dire une des médianes du triangle. Le centre de gravité de la plaque doit donc se trouver sur cette médiane. Pour les mêmes raisons il doit également se trouver sur les autres médianes. Il est donc à l'intersection des médianes du triangle. On peut montrer que ce point est situé au tiers de chaque médiane, à compter depuis un côté.





5. Les figures ci-dessous évoquent différents leviers. Lorsque les déplacements des objets sont lents, les accélérations sont négligeables et les forces qui s'exercent sur eux doivent satisfaire aux conditions d'équilibre. Dans chaque cas, on a dessiné les forces qui s'exercent sur le levier et non les forces que le levier exerce. On a supposé le poids du levier négligeable.





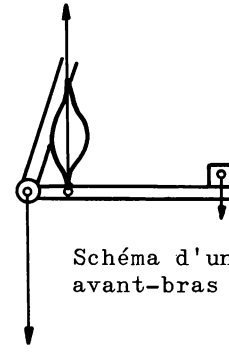
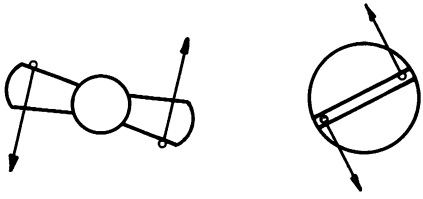


Schéma d'un avant-bras

§ 51 Couple

Définition: On appelle couple l'ensemble de deux forces opposées ayant des supports différents.



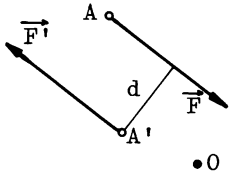
On exerce un couple sur la poignée d'un robinet pour l'ouvrir ou le fermer. On en exerce un sur la tête d'une vis pour la faire tourner.

Considérons un objet subissant un couple, mais aucune autre force. On peut montrer que l'effet du couple est de modifier la vitesse de rotation de l'objet autour de son centre de masse. Ainsi, le couple est aux rotations ce que la force est aux translations. Nous démontrerons plus tard (§ 128) que le couple est incapable d'accélérer le centre de masse. On peut donc lier à ce point un référentiel d'inertie. Si on applique un couple au corps immobile (relativement à ce référentiel), il se met à tourner de plus en plus vite autour du centre de masse. Si le couple cesse son action, le corps continue à tourner, et sa vitesse de rotation (ou vitesse angulaire) est constante: c'est une forme de la loi d'inertie. Si ensuite on exerce un couple en sens inverse, le corps ralentit sa rotation, s'arrête, puis se met à tourner dans l'autre sens. Un couple produit donc des accélérations angulaires (§ 134).

On exerce un couple sur une toupie pour la mettre en mouvement. Puis, lorsqu'on la laisse aller seule, les frottements exercent un couple de freinage qui, petit à petit, diminue sa vitesse de rotation.

La terre tourne journellement sur elle-même sans l'aide d'aucun couple. Et comme elle ne subit pas de frottement, sa vitesse de rotation est constante.

Soit un couple constitué de deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ appliquées en des points A et A'. Soit d la distance entre les deux supports. Nous appelons moment du couple la somme des moments des forces qui le constituent.



$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OA}' \wedge \vec{F}'.$$

En tenant compte du fait que $\vec{F}' = -\vec{F}$, on peut écrire:

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} - \overrightarrow{OA}' \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}') \wedge \vec{F} = \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'un couple est donc indépendant de l'origine choisie.

$\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F}$ n'est autre que le moment de $\vec{F}$ si on prend A' pour origine. La grandeur de ce moment est égale au produit de la grandeur de $\vec{F}$ par son bras de levier. On a donc

$$M = Fd.$$

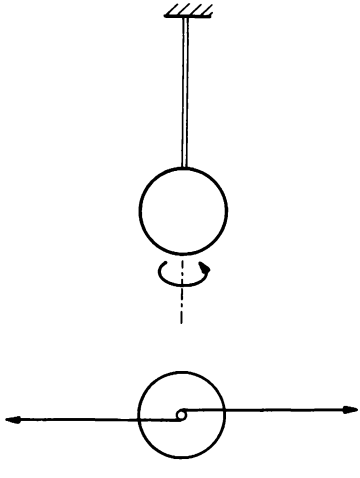
La grandeur du moment d'un couple est égale au produit de la distance entre les deux supports par la grandeur de l'une des forces.

On peut démontrer que deux couples de même moment sont équivalents. Cela implique que l'effet d'un couple est entièrement déterminé par son moment. Pour être renseigné sur l'effet d'un couple, il n'y a pas besoin de savoir quelles sont les grandeurs des forces et la distance des supports, il suffit de connaître le moment.

§ 52* Pendule de torsion

L'extrémité supérieure d'un fil métallique vertical est attachée à un point fixe. Son extrémité inférieure est attachée à un objet. Ce système est appelé pendule de torsion, si on envisage ses oscillations autour d'un axe vertical coïncidant avec le fil.

Il existe des horloges dans lesquelles le balancier est remplacé par un tel système.



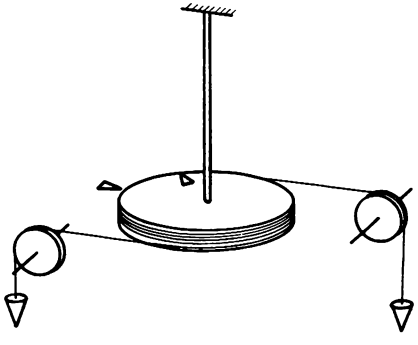
Lorsque l'objet suspendu n'est sollicité par aucune autre force que son poids et la force de soutien qu'exerce le fil, il s'immobilise dans une certaine position. C'est sa position d'équilibre. Si on fait tourner l'objet sur lui-même, le fil se tord. Et parce qu'il est tordu, il exerce sur l'objet des forces équivalentes à un couple tendant à le faire revenir à sa position d'équilibre. (Le fil n'exerce pas seulement deux forces sur l'objet suspendu. Mais l'ensemble des forces qu'il exerce a le même effet qu'un couple.) Le moment de ce couple est appelé moment de torsion. Dans la plupart des cas,

l'angle de torsion du fil est proportionnel au moment de torsion. En désignant l'angle par θ et le moment par M, on peut écrire:

$$M = C\theta,$$

expression analogue à la relation entre la force exercée par un ressort et la déformation qu'il subit (§ 40). C est une constante de proportionnalité appelée constante de torsion du fil. Dans le système internationnal d'unités (SI), elle se mesure en Nm/rad, c'est-à-dire en Nm, puisque 1 rad = 1. Si le fil est très rigide, à un angle donné correspond une grande valeur du moment de torsion. D'après la formule ci-dessus, C est alors grand. C exprime donc la rigidité du fil.

Pour mesurer la constante de torsion d'un fil, on l'attache à un point fixe et on y suspend une plaque de forme cylindrique. Deux fils souples, attachés au cylindre et enroulés sur lui passent sur des poulies et retiennent en l'air deux objets de poids égaux mg. Sous l'influence du couple exercé par les fils, le cylindre tourne jusqu'à ce que le moment de torsion soit devenu aussi grand que le moment de ce couple. Lorsque le système est immobile, on peut écrire, en vertu de la règle des moments:



$$C\theta = mgd,$$

d étant le diamètre du cylindre. On mesure θ, mg et d, puis on calcule C.

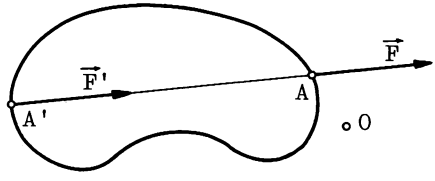
§ 53* Corps rigides

Lorsqu'un corps étendu est sollicité par des forces, il y a deux effets possibles, qui peuvent d'ailleurs être présents simultanément: les variations de vitesse et les déformations.

Les déformations peuvent être permanentes (noix écrasée par une pince) ou limitées au temps où s'exercent les forces (ressort). Lorsqu'un corps reprend sa forme initiale après que les forces qui s'exercent sur lui aient cessé leur action, on dit qu'il est élastique.

Si les déformations sont négligeables, le corps est dit rigide. La rigidité est évidemment relative à la grandeur des forces appliquées. Lorsqu'on parle de corps rigides, cela signifie que les forces sont suffisamment petites pour ne pas provoquer de déformations importantes.

Cherchons à comparer les effets de deux forces égales $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, ayant le même support, mais appliquées en des points A et A' différents d'un même corps. Premièrement, les vecteurs représentant ces forces sont égaux. Secondement, leurs moments sont égaux. En effet:



$$\overrightarrow{OA}' \wedge \vec{F}' = \overrightarrow{OA}' \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA}') \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AA}' \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}.$$

Les lois exprimant les effets dynamiques des forces font intervenir soit les vecteurs force soit leurs moments. Ainsi $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont équivalents quant à leurs effets dynamiques. Ces deux forces peuvent toutefois avoir des effets différents quant aux déformations qu'elles produisent. Il en est ainsi lorsque l'objet auquel elles s'appliquent est mou. Mais si on a affaire à un corps rigide, $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont parfaitement équivalents. On énonce ce résultat en disant:

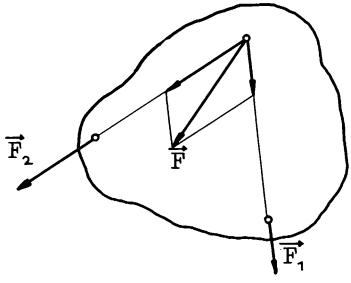
> Une force appliquée à un corps rigide peut glisser sur son support.

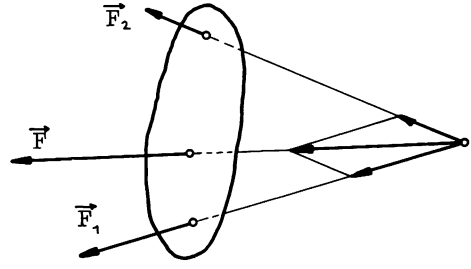
Dans le cas des corps rigides, le point d'application d'une force perd son importance. Ce qui importe, c'est le support ou, comme on dit aussi, la ligne d'action de la force. Les forces sont représentées par des vecteurs glissants.

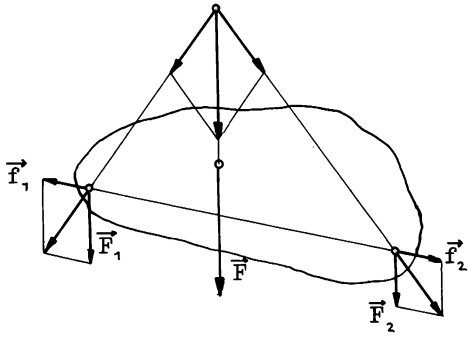
Le calcul fait plus haut peut s'interpréter ainsi: Le moment d'une force est invariant relativement à un glissement de la force sur son support.

La propriété de glissement que nous venons d'étudier peut être mise à profit pour déterminer la résultante de plusieurs forces appliquées à un corps rigide. Nous savons que dans le cas d'un point matériel, un ensemble de forces admet toujours une résultante, c'est-à-dire une force qui a les mêmes effets que l'ensemble des forces données. C'est la somme vectorielle de ces forces (§ 37). Il n'y a aucun problème quant au point d'application, puisque toutes les forces s'exercent sur le même point. Dans le cas des corps étendus, par contre, un ensemble de forces ne possède pas toujours de résultante. Par exemple, il est impossible de trouver une force unique qui soit

équivalente à un couple. Dans bien des cas toutefois, un ensemble de forces appliquées à un corps rigide admet une résultante. Les figures ci-dessous montrent comment on peut composer deux forces coplanaires $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, en utilisant la propriété de glissement. La résultante est désignée par $\vec{F}$.







Dans le cas où les deux forces données $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont parallèles, on adjoint au système deux forces directement opposées $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$. Cette adjonction ne modifie rien parce que $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ ont une somme nulle et un moment total nul.

§ 54* Stabilité d'un équilibre

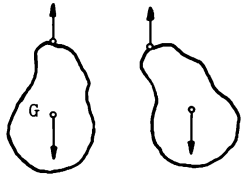
Nous considérons un corps solide en équilibre et lié non rigidement à un certain endroit ou dans une certaine position. Lorsqu'on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre et qu'on l'abandonne à lui-même, trois cas peuvent se présenter:

1. L'objet revient à sa position initiale. L'équilibre est dit stable.

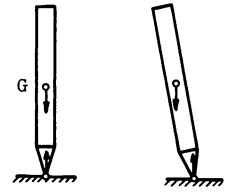
2. L'objet s'éloigne de sa position initiale. L'équilibre est dit instable.

3. L'objet reste dans sa nouvelle position. L'équilibre est dit indifférent.

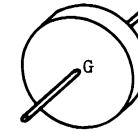
Nous nous contenterons d'examiner des situations d'équilibre où un corps est soumis à deux forces seulement: son poids et une force de soutien. Un corps suspendu à un point au-dessus de lui est en équilibre stable. Un corps reposant sur une surface par une pointe est en équilibre instable (à supposer qu'on puisse l'y mettre). Un corps pouvant tourner autour d'un axe passant par son centre de gravité est en équilibre indifférent.



stable



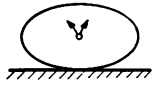
instable



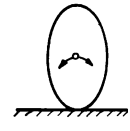
indifférent

Lorsque ces corps sont dans leur position d'équilibre, les forces qu'ils subissent sont directement opposées. Dans les deux premiers cas, lorsqu'on les déplace légèrement, ces deux forces constituent un couple qui tend à ramener l'objet à sa position d'équilibre ou à l'en éloigner. Dans le troisième cas, elles ne forment pas de couple.

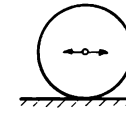
Lorsqu'un corps est soumis à la pesanteur, son centre de gravité tend toujours à descendre. On peut donc établir une relation entre le caractère d'un équilibre et les mouvements du centre de gravité lorsque le corps est écarté de sa position d'équiiibre. Si tout déplacement fait monter le centre de gravité, celui-ci revient à sa place dès que l'objet est abandonné à lui-même: l'équilibre est stable. Si tout déplacement



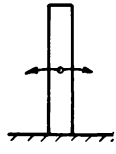
stable



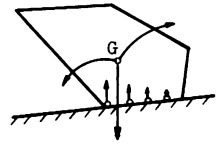
instable



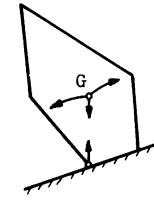
indifférent



stable



stable



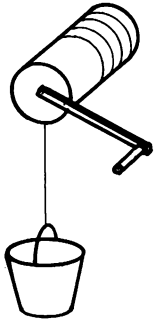
instable

de l'objet fait descendre le centre de gravité, il s'éloigne de sa position initiale dès qu'il est laissé à lui-même: l'équilibre est instable. Si tout déplacement laisse le centre de gravité à la même hauteur, rien ne pousse le corps à revenir à sa position initiale: l'équilibre est indifférent. Si certains déplacements font monter le centre de gravité et que d'autres le font descendre, on considère aussi l'équilibre comme instable, car il y a toujours de petites influences qui font bouger l'objet et qui font trouver à son centre de gravité le chemin de la descente. Dans le cas d'un équilibre stable, le centre de gravité se trouve pour ainsi dire "dans un trou". Si ce trou est profond, de petits mouvements de l'objet ne peuvent faire sortir le centre de gravité du trou: l'équilibre est très stable. Si au contraire le trou est peu profond, il suffit d'une petite impulsion pour faire sortir le centre de gravité du trou: l'équilibre est peu stable. Si la profondeur du trou tend vers zéro, l'équilibre peu stable devient un équilibre instable.

Lorsqu'un objet repose par trois points au moins sur une surface, le polygone convexe défini par les points de contact les plus extérieurs est appelé base de sustentation. L'équilibre est stable si la verticale passant par le centre de gravité coupe la base de sustentation, car alors ce point est dans un trou. L'équilibre est peu stable si cette verticale passe près du bord de la base de sustentation car un petit mouvement suffit pour mettre le centre de gravité sur un chemin descendant.

§ 55 Exemples de calcul

Exemple 1: Un treuil est installé à l'ouverture d'un puits, pour faire monter des seaux d'eau. Le cylindre sur lequel s'enroule la corde a un rayon R, le bras de la manivelle a une longueur b, et le seau rempli a une masse m.



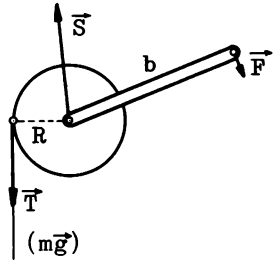
a) Quelle est la force qu'il faut exercer sur la poignée de la manivelle, dans la direction de son mouvement, pour faire monter le seau ?

b) On suspend à la poignée un objet de masse M pour retenir le seau en l'air. Quel est l'angle formé par le bras de la manivelle avec la verticale lorsque le système s'immobilise ?

△△△ Nous considérons le système matériel constitué par le cylindre et la manivelle. Nous supposons que le poids du système

est négligeable. Nous supposons aussi le système "extra-plat", de manière à pouvoir considérer les forces comme coplanaires. Ces forces sont: la traction $\vec{T}$ de la corde, la force $\vec{F}$ exercée sur la poignée, et la force de soutien $\vec{S}$ de l'axe.

a) Nous nous limitons au cas où le seau monte lentement. Le système peut alors être considéré comme passant par une suite d'états d'équilibre. La traction de la corde est égale au poids $m\vec{g}$ du seau. La seconde condition d'équilibre s'écrit, en prenant un point de l'axe pour origine:



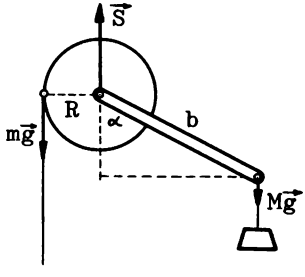
$$mgR = Fb.$$

La force à exercer est donc:

$$F = mg\,\frac{R}{b}.$$

On remarque que si le bras de la manivelle vaut n fois le rayon du treuil, la force à exercer vaut 1/n du poids de l'objet à soulever.

b) Dans ce cas, la force $\vec{F}$ est remplacée par une force verticale, égale au poids de l'objet suspendu à la poignée. La seconde condition d'équilibre s'écrit ici:



$$mgR = Mgb\,\sin\alpha.$$

D'où: $$\sin\alpha = \frac{mR}{Mb}.$$

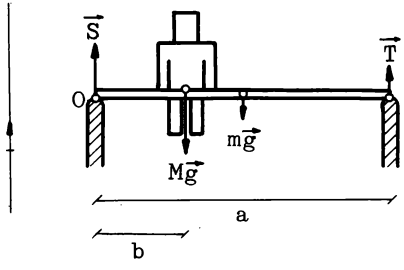
Ce résultat n'a de sens que si

$$Mb \geq mR \qquad \text{ou} \qquad M \geq \frac{mR}{b}.$$

On comprend que l'équilibre ne peut être réalisé que si l'objet suspendu à la poignée a une masse suffisante.

Exemple 2: Une planche de longueur a et de masse m repose par ses extrémités sur deux socles de pierre. Un homme de masse M est assis sur la planche, à une distance b d'une des extrémités. Calculer les forces de soutien exercées par les socles sur la planche.

△△△ Nous considérons le système matériel "homme-planche". Quatre forces (extérieures) s'exercent sur lui: le poids de l'homme $M\vec{g}$, celui de la planche $m\vec{g}$, et les forces de soutien $\vec{S}$ et $\vec{T}$ des appuis. La première condition d'équilibre est:



$$M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = \vec{0}.$$

Par projection sur un axe vertical, on a:

$$- Mg - mg + S + T = 0.$$

L'origine étant choisie à une extrémité de la planche, la seconde condition d'équilibre peut s'écrire:

$$Mgb + mg\,\frac{a}{2} = Ta.$$

On en déduit:

$$T = Mg\,\frac{b}{a} + \frac{mg}{2}$$

$$S = Mg + mg - T = Mg\left(1 - \frac{b}{a}\right) + \frac{mg}{2}$$

$$S = \frac{Mg(a - b)}{a} + \frac{mg}{2}.$$

Remarque: On obtient encore plus simplement S en utilisant une nouvelle fois la seconde condition d'équilibre, avec l'autre extrémité de la planche comme origine. On a alors:

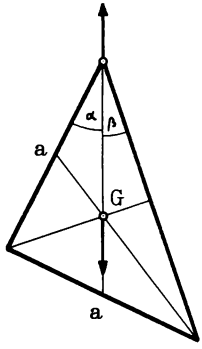
$$Mg(a - b) + mg\,\frac{a}{2} = Sa,$$

d'où $$S = \frac{Mg(a - b)}{a} + \frac{mg}{2}.$$

N.B. Dans les problèmes où il y a plusieurs forces inconnues, on a intérêt à choisir l'origine sur le support de l'une d'elles. On rend ainsi un moment nul, et l'expression de la seconde condition contient une inconnue de moins.

Exemple 3: Une plaque ayant la forme d'un triangle rectangle et isocèle est suspendue par le sommet d'un de ses angles aigus. Calculer les angles formés par les côtés adjacents au point de suspension et la verticale.

△△△ Le centre de gravité d'un triangle est situé au point d'intersection des médianes. L'objet est en équilibre sous l'influence de deux forces: son poids, appliqué au centre de gravité, et une force de soutien, appliquée à un sommet. Ces



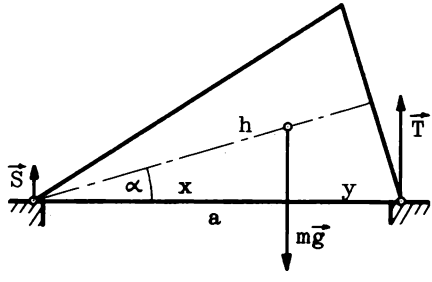
deux forces sont donc directement opposées. On en déduit que la médiane issue du point de suspension est verticale. Cette médiane forme avec les côtés de la plaque les angles cherchés, α et β. Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport du côté opposé au côté adjacent. On a donc:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = 26{,}6^{\circ}.$$

et $$\beta = 45^{\circ} - \alpha = 18{,}4^{\circ}.$$

Exemple 4*: Un cône circulaire droit, de masse m, de hauteur h et d'apothème a repose sur deux appuis de même altitude par les extrémités de l'apothème. Calculer les forces de soutien exercées par les appuis.

△△△ Le barycentre du cône se trouve sur l'axe à une distance 3h/4 du sommet. Le support du poids partage l'apothème en deux tronçons de longueur x et y. On a:



$$x = \frac{3h}{4}\cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{h}{a}.$$

Donc

$$x = \frac{3h^2}{4a} \quad \text{et} \quad y = a - \frac{3h^2}{4a}$$

Le cône subit deux forces de soutien $\vec{S}$ et $\vec{T}$ et son poids $m\vec{g}$. Il est en équilibre, sous l'influence de ces trois forces. La deuxième condition d'équilibre, écrite en prenant pour origine l'un des points d'appui, et ensuite l'autre, fournit:

$$Sa = mgy \qquad \text{et} \qquad Ta = mgx$$

On en déduit:

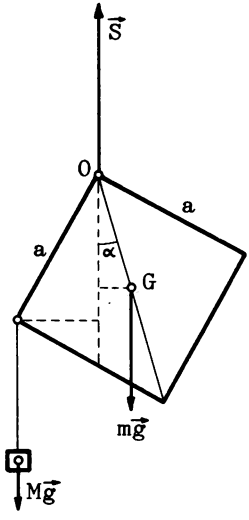
$$S = \frac{mgy}{a} = mg\left(1 - \frac{3h^2}{4a^2}\right) \qquad \text{et} \qquad T = \frac{mgx}{a} = mg\,\frac{3h^2}{4a^2}$$

Dans le cas particulier où le cône est très pointu, h est voisin de a. Les forces de soutien valent alors:

$$S \cong \frac{1}{4}\,mg \qquad \text{et} \qquad T \cong \frac{3}{4}\,mg.$$

Exemple 5*: Une plaque carrée, de côté a et de masse m, est suspendue par un de ses sommets. Un objet de masse M est attaché à l'un des sommets voisins. Calculer l'angle que forme avec la verticale la diagonale issue du point de suspension.

△△△ Comme système matériel, nous considérons la plaque et l'objet qui lui est attaché. Sur ce système s'exercent trois forces: le poids $m\vec{g}$ de la plaque, le poids $M\vec{g}$ de l'objet attaché et une force de soutien $\vec{S}$. Ecrivons la seconde condition d'équilibre, en prenant pour origine le point où la plaque est suspendue.



$$mg.OG.\sin\alpha = Mga\ \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$$

On a successivement:

$$mg.a\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha = Mga(\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\ \sin\alpha)$$

$$m\ \sin\alpha = M\ \cos\alpha - M\ \sin\alpha$$

$$m\ tg\alpha = M - M\ tg\alpha$$

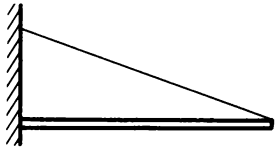
$$tg\alpha = \frac{M}{M + m}.$$

Si $M << m$, $tg\alpha = 0$, et $\alpha = 0$.

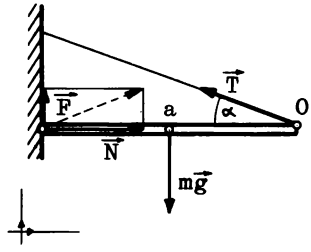
Si $M >> m$, $tg\alpha = 1$, et $\alpha = 45^{o}$.

Ce qui se comprend intuitivement.

Exemple 6*: Une planche a une longueur de 1 m et une masse de 1 kg. Elle est tenue horizontalement contre un mur au moyen d'un fil attaché à une de ses extrémités. Le frottement l'empêche de tomber. Le fil forme avec la planche un angle de 20°. Calculer la force de traction du fil et les forces exercées par le mur sur la planche.



△△△ La planche est sollicitée par quatre forces: son poids $m\vec{g}$, une traction $\vec{T}$ de la part du fil, une force normale $\vec{N}$ exercée par le mur et une force de frottement $\vec{F}$ exercée également par le mur. Comme elle est en équilibre, on peut écrire:



$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \qquad \text{(1ère condition)}$$

d'où $\quad N - T\cos\alpha = 0 \qquad (1)$

$$F - mg + T\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

et, en prenant comme origine le point d'attache du fil:

$$Fa = mg\,\frac{a}{2}. \qquad (3) \qquad \text{(2e condition)}$$

L'équation (3) fournit directement la valeur du frottement:

$$F = \tfrac{1}{2}mg.$$

L'équation (2) fournit ensuite la traction du fil:

$$T = \frac{mg - F}{\sin\alpha} = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

L'équation (1) donne enfin la force normale exercée par le mur:

$$N = T\cos\alpha = \frac{mg}{2\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Le calcul numérique conduit à: $F = 5$ N

$T = 14{,}6$ N

$N = 13{,}7$ N.

Chapitre 10

STATIQUE DES FLUIDES

§ 56 Pression

Considérons une force $\vec{F}$ s'appliquant sur une surface plane, d'aire S, perpendiculairement à celle-ci. Supposons que cette force soit uniformément répartie sur la surface donnée. Le quotient F/S représente la force par unité de surface. On lui donne le nom de pression.

> Définition: On appelle pression le rapport de la grandeur de la force qui s'exerce normalement sur une surface à l'aire de celle-ci.

En désignant la pression par p, on a:

$$p = \frac{F}{S}.$$

La pression n'est pas un vecteur, mais une grandeur scalaire. Dans le SI, elle se mesure en N/m^2. Cette unité porte le nom de pascal (abréviation: Pa).

$$1\ Pa = 1\ \frac{N}{m^2} = 1\ \frac{kg}{ms^2}.$$

D'autres unités de pression seront mentionnées plus loin (§ 59).

Voici quelques exemples illustrant la notion de pression.

Un homme ne peut marcher sur de la neige fraîche sans enfoncer. S'il chausse des skis, son poids est réparti sur une plus grande surface. La pression qu'il exerce sur la neige est plus faible et celle-ci s'enfonce moins.

Une punaise exerce des forces de même grandeur sur la planche où on l'enfonce et sur le pouce de l'opérateur. La surface de la pointe étant beaucoup plus petite que celle du disque, la pression est beaucoup plus grande sur la planche que sur le

pouce. C'est pourquoi la punaise s'enfonce dans la planche.

Lorsqu'on tire un coup de canon, les gaz produits par l'explosion de la poudre sont à une pression considérable. Ils exercent sur l'obus une force qui l'expulse.

§ 57 Principe de Pascal

La plupart des corps chimiquement purs peuvent se présenter dans trois états - solide, liquide, gazeux - selon la température à laquelle ils se trouvent. Ces trois états sont caractérisés de la façon suivante.

Dans les solides, les molécules exercent les unes sur les autres d'importantes forces d'attraction, appelées forces de cohésion. Il en résulte que chaque molécule occupe une position bien déterminée et que le corps possède une certaine rigidité. Il a une forme propre et des dimensions propres. L'agitation thermique consiste en une vibration de chaque molécule autour de sa position d'équilibre.

Dans les liquides, les forces de cohésion existent aussi, mais sont beaucoup plus faibles que dans les solides. Les molécules n'occupent pas de positions bien déterminées. Elles peuvent glisser les unes contre les autres, si bien que le liquide n'a ni rigidité, ni forme propre. Toutefois, elles sont toujours serrées les unes contre les autres, de sorte que le liquide a un volume propre.

Dans les gaz, les forces de cohésion sont si faibles qu'elles ne jouent presque aucun rôle. Les molécules se répartissent dans l'espace mis à leur disposition. Elles circulent à une vitesse d'autant plus grande que la température est élevée et effectuent des chocs contre les parois du récipient ou les unes contre les autres. Un gaz n'a ni rigidité, ni forme propre, ni volume propre. L'espace qu'il occupe est en général beaucoup plus grand que celui qu'occuperaient ses molécules si elles étaient serrées les unes contre les autres.

Les liquides et les gaz sont désignés par le nom général de fluides.

Lorsqu'un objet est plongé dans un fluide, chaque partie de sa surface subit une force, en raison des chocs des molécules contre elle. L'étude expérimentale de cette force conduit aux constatations suivantes. Un fluide en équilibre exerce une force normale sur toute surface avec laquelle il est en contact. Si on compare les forces exercées, en une même région du fluide, sur des surfaces planes de différentes grandeurs,

on constate que la force est proportionnelle à l'aire de la surface, ce qui implique que le quotient de la grandeur de la force par l'aire de la surface est fixe. Il existe donc une pression p dans le fluide et la force exercée sur une surface plane d'aire S a pour grandeur

$$F = pS.$$

L'expérience montre en outre que sur des surfaces diversement orientées, mais de même aire, la force a toujours la même grandeur. La pression est donc indépendante de toute direction.

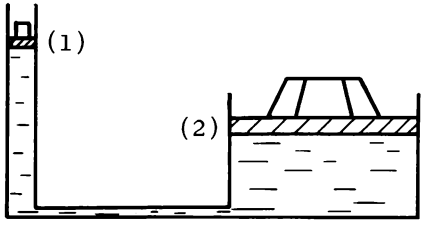
En différentes régions du fluide, la pression peut varier à cause de la pesanteur, comme nous le montrerons au paragraphe suivant. Mais si les effets de la pesanteur sont négligeables, on constate que la pression est la même en tout point du fluide.

Nous résumerons tout ceci par l'énoncé suivant:

> Principe de Pascal: En tout point d'un fluide en équilibre, il existe une pression. Celle-ci est indépendante de toute direction. Dans la mesure où la pesanteur est négligeable, cette pression est la même en tous les points du fluide.

Une conséquence de ce principe est que si on provoque une variation de pression en un point d'un fluide en équilibre, celle-ci se transmet immédiatement à tous les autres points du fluide.

Dans un grand nombre de systèmes utilisés par la technique, on met à profit la propriété des fluides de transmettre des pressions. Il en est ainsi, par exemple, dans la presse hydraulique, dont la figure ci-contre illustre le principe. Un liquide (généralement de l'huile) est contenu dans un récipient comportant deux parties cylindriques où coulissent des pistons de diamètres très différents. Une petite force sur le petit piston suffit à produire une pression notable dans le fluide. Cette pression se transmet partout. En raison de sa



grande surface, le grand piston subit une force considérable. En désignant par S_1, S_2 les aires des pistons et par F_1, F_2 les grandeurs des forces qui s'exercent sur eux (ou qu'ils exercent) on a:

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \qquad (1)$$

Les forces sont proportionnelles aux surfaces. En choisissant une section suffisamment grande pour le grand cylindre, on peut obtenir une force aussi grande que l'on veut.

On peut donner au petit piston un mouvement alternatif au moyen d'un moteur et, par un jeu de soupapes, amener toujours plus de liquide dans le grand cylindre. On peut ainsi, non seulement exercer de très grandes forces avec le piston, mais le faire se déplacer autant que l'on veut. C'est généralement ainsi que sont actionnés les bulldozers, les élévateurs d'autos, et bien d'autres machines devant produire de grandes forces.

Si le petit piston subit un déplacement total h_1, le volume de liquide chassé du petit cylindre est $S_1 h_1$. Il est égal au volume de liquide qui est entré dans le grand cylindre. On peut donc écrire:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{h_2}{h_1} \qquad (2)$$

où h_2 représente le déplacement total du grand piston. En comparant les relations (1) et (2), on déduit:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \text{ou} \qquad F_1 h_1 = F_2 h_2$$

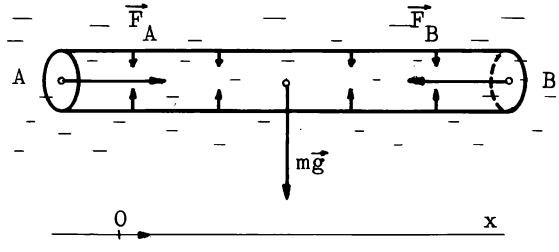
On voit que les déplacements des pistons sont inversement proportionnels aux forces qui s'exercent sur eux (ou qu'ils exercent). Là où la force est très grande, le déplacement est très petit. En d'autres termes, on perd en déplacement ce qu'on gagne en force. Le produit d'une force par le déplacement de son point d'application (à quelques détails mathématiques près) constitue ce qu'on appelle le travail de cette force. Nous venons donc de montrer que le travail effectué par la force qui agit sur le petit piston est égal au travail effectué par le grand piston. En d'autres termes, ce système conserve le travail. (Voir § 84).

On donne le nom de manomètre à tout instrument qui mesure la pression. Les instruments qui mesurent la pression atmosphérique ont reçu le nom particulier de baromètres.

§ 58 Loi de croissance de la pression

Nous avons vu que la pression dans un fluide en équilibre était la même en tout point, pour autant qu'on puisse négliger l'effet de la pesanteur. Nous allons voir maintenant comment la pesanteur fait varier la pression d'un point à un autre.

Dans un fluide en équilibre, considérons deux points A et B de même altitude. Par la pensée, isolons une portion de fluide ayant la forme d'un cylindre circulaire droit dont les bases ont les points A et B pour centres. Les forces que subit cette portion de fluide sont: le poids $m\vec{g}$, des forces horizontales $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ qui s'exercent sur les bases du cylindre et des forces $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), perpendiculaires à l'axe du cylindre, qui s'exercent sur chaque élément de la surface latérale. L'objet étant en équilibre, on a:



$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \sum \vec{F}_i = \vec{0}.$$

En projetant tous les vecteurs sur un axe horizontal, on obtient:

$$F_A - F_B = 0.$$

En désignant par S l'aire de base du cylindre (qu'on choisit assez petite pour que la pression soit la même en chacun de ses points), on peut écrire:

$$p_A.S - p_B.S = 0,$$

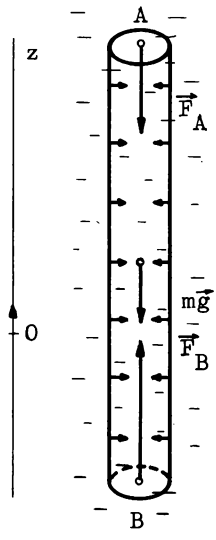
où p_A et p_B sont les pressions en A et B. On en déduit:

$$p_A = p_B.$$

> Dans un fluide en équilibre, tous les points de même altitude sont à la même pression.

On peut donc parler sans ambiguïté de la pression à un certain niveau d'un fluide.

Pour comparer les pressions à deux niveaux différents, prenons deux points A et B du fluide, sur une même verticale. Par la pensée, isolons une portion de fluide ayant la forme d'un cylindre circulaire droit dont les bases ont pour centre les points A et B. Ce cylindre subit les forces suivantes: son poids $m\vec{g}$, des forces verticales $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ s'exerçant sur ses bases et des forces horizontales $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) s'exerçant sur chaque élément de sa surface latérale. A cause de l'équilibre, on peut écrire:



$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \sum\vec{F}_i = \vec{0}.$$

Projetons tous les vecteurs sur un axe vertical Oz, orienté vers le haut. L'équation entraîne:

$$- mg - F_A + F_B = 0,$$

et en désignant l'aire de base du cylindre par S:

$$- mg - p_A.S + p_B.S = 0.$$

Si la masse volumique du fluide est pratiquement constante dans la région considérée, la masse du cylindre vaut

$$m = \rho V = \rho S(z_A - z_B).$$

z_A et z_B désignent les altitudes des points A et B, relativement à l'origine choisie, qui est arbitraire. L'avant-dernière relation devient donc:

$$-\rho S(z_A - z_B).g - p_A.S + p_B.S = 0$$

ou

$$\boxed{p_A - p_B = -\rho g(z_A - z_B).}$$

Nous appellerons cette relation loi de croissance de la pression. Remarquons qu'elle ne fournit pas la valeur de la pression en un point, mais la différence de pression entre deux points ou deux niveaux. Par conséquent, si on connaît la pression en un point d'un fluide, elle permet de calculer la pression en tout autre point. Sous forme plus résumée, cette relation peut s'écrire:

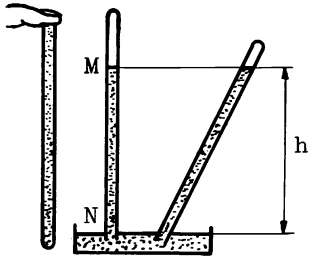
$$\Delta p = -\rho g \Delta z.$$

La différence de pression entre deux points est proportionnelle à la dénivellation entre ces points. Le coefficient de proportionnalité fait intervenir g, ce qui montre que les variations de pression au sein d'un même fluide sont dues à la pesanteur. Ce coefficient est négatif: cela correspond au fait que la pression décroît quand l'altitude croît.

Soulignons que cette relation n'est valable que si la masse volumique du fluide peut être considérée comme constante entre les points A et B considérés. Les liquides étant pratiquement incompressibles, leur masse volumique est constante et la loi de croissance peut leur être appliquée sans précautions. Les gaz, par contre, sont fortement compressibles, de sorte que leur masse volumique varie avec la pression. Dans l'atmosphère, la masse volumique diminue de moitié quand on s'élève de 6 km environ. On ne peut appliquer la loi de croissance qu'à des points dont la dénivellation ne dépasse pas quelques dizaines de mètres. (Voir à ce sujet: § 64, Exemple 5.)

§ 59 Pression atmosphérique

La pression de l'air atmosphérique a été mise en évidence, et mesurée, par l'expérience historique du tube de Torricelli. On peut la réaliser ainsi. On remplit de mercure un tube de verre fermé à une extrémité. On ferme avec un doigt l'autre extrémité et, en retournant le tube, on place celle-ci dans une cuvette de mercure. Lorsqu'on retire son doigt, on constate que le mercure descend un peu dans le tube et que son niveau supérieur s'immobilise à quelque 72 à 75 cm au-dessus du mercure de la cuvette. La pression atmosphérique soutient le liquide dans le tube.



Appliquons au mercure la loi de croissance de la pression. Nous choisissons un point M à la limite supérieure du mercure, où il y a pratiquement le vide, et un point N à la surface du mercure dans la cuvette, où la pression est égale à la pression atmosphérique b.

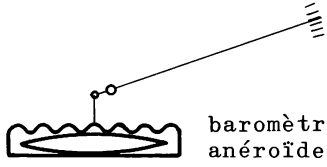
$$p_M - p_N = -\rho g(z_M - z_N).$$

$$0 - b = -\rho gh$$

$$\boxed{b = \rho gh.}$$

La hauteur h de la colonne de mercure mesure donc la pression atmosphérique b. Remarquons que, b, ρ et g étant donnés, la dénivellation des points M et N est fixe. Si on incline le tube, le point M se déplace dans un plan horizontal.

Le tube de Torricelli est le plus simple des baromètres. On construit aussi des baromètres anéroïdes, c'est-à-dire sans liquide. L'organe essentiel est alors une boîte métallique élastique dans laquelle on a fait le vide. (Ce peut être, par exemple, une boîte ayant une face ondulée et contenant un ressort.) La pression atmosphérique écrase la boîte et la déformation est amplifiée par un levier. On étalonne l'instrument par comparaison avec un baromètre à mercure.



baromètre anéroïde

Au niveau de la mer, la hauteur moyenne du baromètre à mercure est de 76 cm. La pression correspondante est conventionnellement appelée pression normale.

Pression normale =

$$\rho gh = 13{,}6.10^3 \frac{kg}{m^3}.9{,}81 \frac{m}{s^2}.0{,}76\ m = 1{,}013.10^5\ Pa.$$

Dans le SI, l'unité de pression est le pascal (Pa ou Nm^{-2}). On utilise encore aujourd'hui plusieurs unités de pression qui n'appartiennent pas au SI.

1. L'atmosphère, qui est équivalent à la pression normale.

$$1\ atm = 1{,}013.10^5\ Pa.$$

2. Le centimètre de mercure, qui correspond à une colonne de mercure de 1 cm de hauteur.

$$1\ cm\ Hg = \rho gh = 13{,}6.10^3 \frac{kg}{m^3}.9{,}81 \frac{m}{s^2}.10^{-2}\ m = 1333\ Pa.$$

3. Le millimètre de mercure ou torr, qui vaut le dixième du précédent.

$$1\ mm\ Hg = 1\ Torr = 133{,}3\ Pa.$$

4. Le kilogramme-force par cm² ou kilopond par cm², qui est très voisin de l'atmosphère.

$$1\ \frac{kg^*}{cm^2} = 1\ \frac{kp}{cm^2} = \frac{9{,}81\ N}{10^{-4}\ m^2} = 0{,}981.10^5\ Pa \cong 1\ atm.$$

5. Le bar, qui est aussi très voisin de l'atmosphère.

$$1\ bar = 10^5\ Pa.$$

6. Le millibar, qui est le millième du bar.

$$1\ mb = 10^2\ Pa.$$

Exprimée à l'aide de ces différentes unités, la pression atmosphérique normale vaut:

$p = 1$ atm,

$p = 76$ cm Hg,

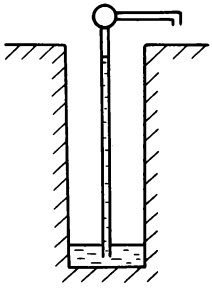
$p = 760$ mm Hg $= 760$ Torr,

$p = 1{,}033\ \frac{kg^*}{cm^2} \cong 1\ \frac{kg^*}{cm^2}$,

$p = 1{,}013$ bar $\cong 1$ bar,

$p = 1013$ mb $\cong 1000$ mb.

On disait autrefois que la nature a horreur du vide et qu'elle fait des efforts pour l'éviter! C'est à l'aide de ce principe qu'on expliquait, par exemple, le fonctionnement d'une pompe aspirante. En fait, le liquide n'est pas aspiré par le vide, mais repoussé depuis le bas par la pression atmosphérique. D'ailleurs, si l'on veut faire monter l'eau d'un puits, on est limité en hauteur par la colonne d'eau qui équilibre juste la pression atmosphérique. Si la pompe est placée trop haut, on réalise une sorte de tube de Torricelli. Dans le meilleur des cas, si on réussit à faire le vide dans la partie supérieure du tuyau, l'eau peut s'élever d'une hauteur h donnée par la formule du baromètre: $b = \rho gh$.



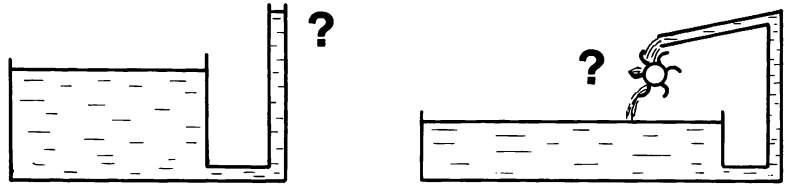
$$h = \frac{b}{\rho g} \cong \frac{10^5\ Nm^{-2}}{10^3\ kgm^{-3}.10\ ms^{-2}} = 10\ m.$$

Si l'on doit élever de l'eau d'une hauteur supérieure à 10 m, on utilise une pompe refoulante, qu'on place près de la nappe d'eau.

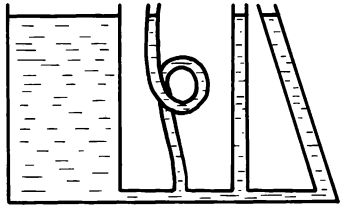
§ 60 Applications diverses

1. Vases communicants

Considérons deux récipients contenant le même liquide et liés entre eux par un tuyau. Si l'un d'eux est beaucoup plus gros que l'autre, on pourrait penser que le poids considérable de son contenu va maintenir le liquide du petit récipient à un niveau plus élevé. S'il en était ainsi, on s'empresserait d'installer une roue de moulin entre les deux récipients et le mouvement perpétuel serait réalisé.



En fait, les vases communicants ont leurs surfaces libres dans un même plan horizontal (si l'on néglige les effets de capillarité, § 62). Pour le démontrer, on choisit deux points quelconques de la surface libre du liquide, par exemple l'un dans un récipient, l'autre dans un autre. Chacun de ces points appartenant à la fois au liquide et à l'atmosphère, la différence de pression entre eux peut être exprimée de deux façons:



$$\Delta p = -\rho_1 g \Delta z \qquad \text{et} \qquad \Delta p = -\rho_2 g \Delta z.$$

On en déduit:

$$\rho_1 g \Delta z = \rho_2 g \Delta z$$

$$(\rho_1 - \rho_2) g \Delta z = 0.$$

Les deux premiers facteurs (la parenthèse et g) étant différents de zéro, on conclut:

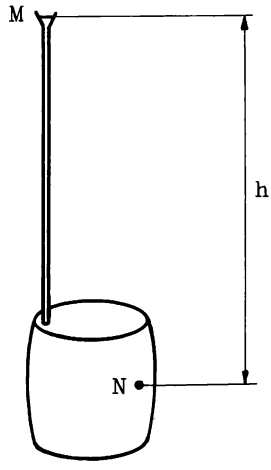
$$\Delta z = 0.$$

Deux points quelconques de la surface libre du liquide sont donc à la même altitude.

2. Tonneau de Pascal

Il s'agit d'une expérience historique. Un tonneau de bois est

rempli d'eau. A l'une des ouvertures, on ajuste un long tuyau vertical. On verse alors une petite quantité d'eau dans le tuyau, de manière à le remplir. Le tonneau éclate.



Cela s'explique par le fait que les forces exercées par l'eau sur les douves du tonneau ne sont pas déterminées par la quantité d'eau ajoutée, mais par la hauteur d'eau dans le tuyau.

Calculons les forces qui s'exercent sur une douve d'aire S. Nous supposons que la pression p dans le liquide est à peu près la même en tout point du tonneau. ρ désignant la masse volumique de l'eau, on a:

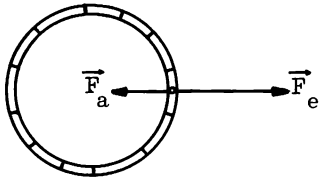
$$p_M - p_N = -\rho g(z_M - z_N)$$

$$b - p = -\rho gh$$

$$p = b + \rho gh.$$

La force exercée par l'eau sur la douve vaut:

$$F_e = pS = bS + \rho ghS.$$



Celle qui est exercée par l'atmosphère vaut:

$$F_a = bS.$$

Les forces exercées par les fluides (eau et air) sur la douve ont donc pour résultante une force orientée vers l'extérieur et ayant pour grandeur

$$F = F_e - F_a = \rho ghS.$$

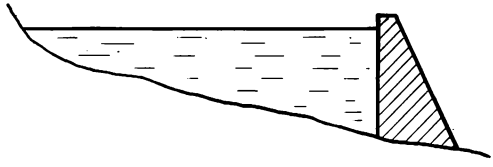
En supposant que le tuyau a une hauteur de 10 m, et que la douve a 10 cm de large et 50 cm de long, la force qui la sollicite vers l'extérieur vaut

$$F = \rho ghS = 10^3 \frac{kg}{m^3}.10 \frac{m}{s^2}.10\ m.0{,}1\ m.0{,}5\ m = 5000\ N.$$

Chaque douve subissant une force de cette grandeur, on comprend que les cercles qui entourent le tonneau se rompent.

Il est intéressant de remarquer que, dans une telle situation, la pression atmosphérique ne joue finalement aucun rôle. A l'intérieur, elle s'ajoute à la pression due à la hauteur d'eau. Mais en même temps, elle agit à l'extérieur de façon à compenser exactement son effet à l'intérieur. Dans toute situation de ce genre, on peut donc faire comme si la pression atmosphérique était nulle.

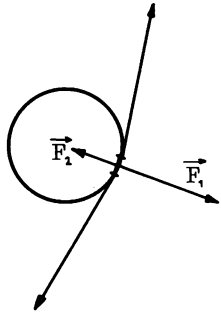
3. Digues et barrages



Les forces exercées par l'eau sur les murs qui la retiennent ne dépendent que de la pression, et par conséquent que de la hauteur d'eau à retenir. La quantité d'eau ne joue aucun rôle.

4. Gonflage d'un pneu

Soient p la pression de l'air contenu dans un pneu et b la pression atmosphérique. p est évidemment supérieur à b. Un petit élément de surface du pneu, d'aire S, subit deux forces normales provenant de l'air intérieur et de l'air extérieur. Leurs grandeurs sont respectivement



$$F_1 = pS \qquad \text{et} \qquad F_2 = bS.$$

L'air sollicite donc cet élément de surface par une force $\vec{F}$, résultante des deux précédentes, dirigée vers l'extérieur et ayant pour grandeur

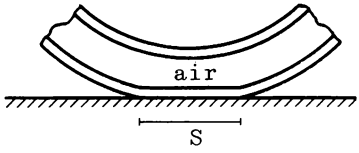
$$F = F_1 - F_2 = (p - b)S.$$

Cette résultante $\vec{F}$ est équilibrée par les forces latérales exercées par les éléments voisins. La dernière relation montre que ce qui compte, pour le gonflage du pneu, c'est la différence entre la pression intérieure et la pression atmosphérique. On l'appelle parfois surpression. Les pressions de gonflage mentionnées par la technique sont toujours des surpressions. Lorsqu'on dit qu'un pneu de voiture est gonflé à 1,8 atm, cela signifie que sa surpression p' vaut 1,8 atm.

$$p' = p - b = 1{,}8 \text{ atm}.$$

Comme $b \cong 1$ atm, cela implique: $p = 2{,}8$ atm.

Examinons maintenant le contact du pneu avec la route. Supposons que la bande de roulement soit tout à fait souple. On désigne par S l'aire de la portion de pneu qui est en contact avec la route. La force exercée par l'air sur cette portion est pratiquement égale à la force exercée par cette portion sur la route. La pression du pneu sur la route peut donc être assimilée à la pression de gonflage. La force exercée par le pneu sur la route (ou par la route sur le pneu) est donc liée à la pression de gonflage par la relation



$$F = p'S.$$

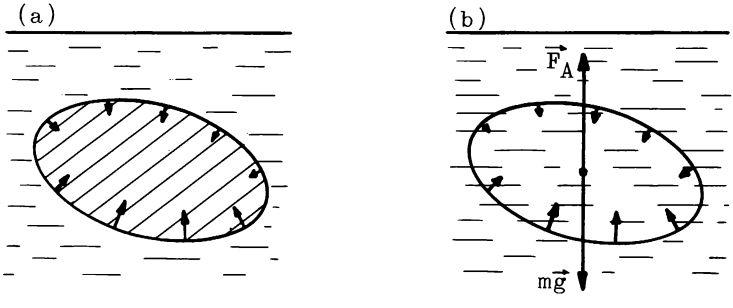
Si un pneu gonflé à 1,8 atm est en contact avec la route sur une surface de 200 cm², la force exercée sur la route vaut

$$F \cong 1{,}8 \ \frac{kp}{cm^2} . 200 \ cm^2 = 360 \ kp.$$

§ 61 Principe d'Archimède

Considérons un corps immergé dans un fluide. En tous les points de sa surface, le fluide exerce sur lui des forces perpendiculaires. La pression augmentant avec la profondeur, les forces sont plus grandes à la partie inférieure du corps qu'à sa partie supérieure. Il en résulte que le corps subit une force ascendante. On l'appelle force d'Archimède ou poussée d'Archimède. Cette force apparaît aussi bien dans les gaz que dans les liquides. C'est elle qui soutient les bateaux et les nageurs, qui fait monter les ballons de foire et les aérostats, qui fait monter les bulles dans l'eau minérale, etc.

Examinons parallèlement deux situations: celle d'un corps immergé dans un fluide (figure a) et celle d'une portion de



fluide limitée par une surface identique à celle du corps immergé et placée au même endroit (figure b). En des points correspondants des deux situations, les pressions sont les mêmes. Les deux objets subissent donc exactement les mêmes forces de la part du fluide environnant. La résultante de ces forces est, dans chacun des cas, la force d'Archimède. Dans le second cas, on peut remarquer que le fluide intérieur est en équilibre dans le fluide extérieur. La force d'Archimède est donc directement opposée au poids du fluide intérieur. Elle a la même grandeur et le même support.

Ce résultat est intéressant parce qu'on peut le transporter dans la situation (a), la force d'Archimède étant la même dans les deux situations. Cette force a pour grandeur le poids d'une quantité de fluide de même volume que l'objet immergé. Cette quantité de fluide est communément appelée: fluide déplacé par l'objet. On peut donc énoncer:

> Principe d'Archimède: Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, ascendante, égale au poids du fluide déplacé.

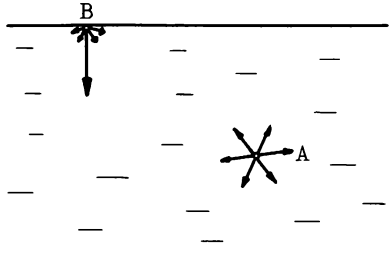
Si on désigne par V le volume immergé et par ρ la masse volumique du fluide, la force d'Archimède a pour grandeur:

$$F_A = \rho V g.$$

De plus, nous avons remarqué que la force d'Archimède et le poids du fluide déplacé ont le même support. Il en résulte qu'on peut considérer le centre de gravité du fluide déplacé comme étant le point d'application de la force d'Archimède. On l'appelle quelquefois: centre de poussée.

§ 62* Tension superficielle et capillarité

Entre les molécules, il existe des forces d'attraction dont l'action ne se fait sentir qu'à très courte distance. Elles apparaissent dans les solides et les liquides, où les molécules sont, pour ainsi dire, serrées les unes contre les autres. Par contre, elles jouent très peu de rôle dans les gaz. Ces forces moléculaires sont à l'origine de phénomènes particuliers qu'on peut



observer à la surface des liquides. Considérons une molécule A, à l'intérieur d'un liquide. Ses voisines exercent sur elle des forces d'attraction dont la résultante est nulle. Par contre, sur une molécule telle que B, appartenant à la surface, toutes les forces d'attraction sont dirigées du côté du liquide. Ces forces ont une résultante différente de zéro. Une molécule de la surface se trouve donc attirée vers le liquide par une force perpendiculaire à la surface. Il s'ensuit que la surface d'un liquide se comporte comme une membrane élastique tendue. On exprime cela en disant qu'il y a une tension superficielle.

Mettons sur une plaque de verre des gouttes de mercure de

grandeur croissante. Les petites sont sphériques. Les plus grandes sont aplaties. Les toutes grandes présentent une surface horizontale dans leur partie centrale et arrondie au bord. Cela s'explique ainsi. Dans toutes les gouttes, il entre en jeu des forces dues à la pesanteur et des forces dues aux phénomènes de surface. Les premières sont proportionnelles au volume de la goutte tandis que les secondes dépendent de sa surface. Or, pour une sphère, le rapport de la surface au volume est:

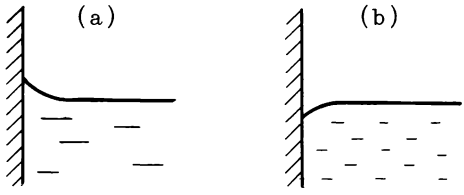
$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R}.$$

Lorsqu'une goutte est très petite, ce rapport est grand. L'influence de la surface est prépondérante relativement à celle du volume. Les effets de la pesanteur sont négligeables et, sous l'influence de la tension superficielle, la goutte prend la forme d'une sphère. Il en est ainsi parce que, pour un volume donné, le corps géométrique de plus petite surface est la sphère. Au contraire, lorsque la goutte est grande, le rapport ci-dessus est petit. L'influence des forces superficielles est faible et celle de la pesanteur importante. Plus les gouttes sont grandes, plus elles s'aplatissent.

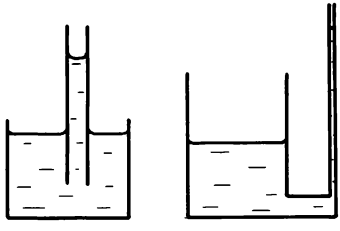
Les bulles de savon s'expliquent aussi à l'aide de la tension superficielle. Dans ce cas, il y a deux surfaces, l'une intérieure, l'autre extérieure. Ces deux membranes tendues déterminent, à l'intérieur de la bulle, une pression supérieure à la pression atmosphérique.

Des phénomènes particuliers apparaissent aussi lorsqu'un li-

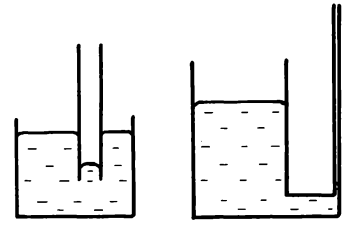
quide est en contact avec un solide. La surface libre du liquide n'est pas horizontale jusqu'au solide. L'angle formé par le liquide avec une paroi solide est aigu ou obtus. Dans le premier cas (a), on dit que le liquide mouille le solide, dans le second (b), qu'il ne le mouille pas. Par exemple, l'eau mouille le verre, mais le mercure ne le mouille pas. Par contre, l'eau ne mouille pas le verre graissé.



Cela est particulièrement important lorsqu'un liquide se trouve dans un tuyau de faible section. S'il le mouille, il s'élève plus haut que ne le prévoit la loi de croissance de la pression. S'il ne le mouille pas il va moins haut.



Liquide qui mouille le solide. Exemple: eau - verre.



Liquide qui ne mouille pas le solide. Exemple: mercure - verre.

Un tuyau de faible section est communément appelé tuyau capillaire, et les phénomènes décrits ici sont des effets de capillarité. C'est par capillarité que le pétrole monte dans la mèche d'une lampe, que l'encre est pompée par un buvard, etc.

§ 63* Corrections barométriques

La hauteur de la colonne de mercure d'un tube de Torricelli est toujours un peu trop faible, à cause de la capillarité. A chaque tube correspond une petite hauteur qu'il faut ajouter à la hauteur mesurée pour obtenir la hauteur que montrerait un tube de très grande section. C'est la correction de capillarité. Elle est d'autant plus grande que le tube est mince.

Lorsque la température s'élève, le mercure se dilate. Sa mas-

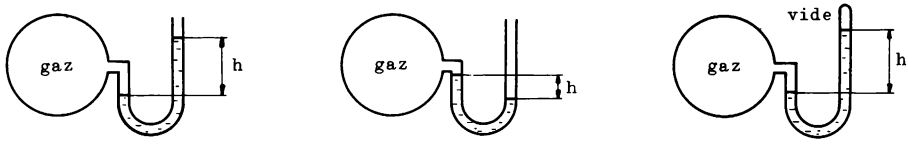
se volumique diminue et la colonne de mercure du baromètre s'allonge. On a l'habitude de ramener les hauteurs barométriques à la température de 0 °C. C'est-à-dire que dans chaque situation, on détermine la hauteur que présenterait un baromètre contenant du mercure à 0 °C. Si la température est supérieure à 0 °C, il faut retrancher une petite hauteur à la hauteur mesurée. C'est la correction de température. Elle dépend non seulement de la température mais de la hauteur du mercure. On peut la trouver dans des tables.

La hauteur se mesure généralement jusqu'au sommet du ménisque de mercure.

Exemple:		
	Hauteur brute	722,7 mm
	Correction de capillarité	+0,3 mm
	Correction de température	-0,9 mm
	Hauteur nette	722,1 mm

§ 64 Exemples de calcul

Exemple 1: Un manomètre est constitué d'un tube en U.
a) Dans les trois situations ci-dessous, déterminer la relation entre la pression p du gaz, la dénivellation h des ménisques de mercure, et la pression barométrique b.
b) Dans la première situation, on a: h = 5 cm et b = 74 cm Hg. Calculer p.



△△△ a) Appliquons la loi de croissance au mercure. Nous choisissons un point à la limite du gaz et du mercure (la pression y est égale à celle du gaz) et un point à la surface du mercure dans l'autre branche du tube (la pression y est égale à b dans les deux premiers cas et elle est nulle dans le troisième). La relation

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

fournit, pour les trois cas respectivement:

$$p - b = -\rho g(-h) \qquad p - b = -\rho g h \qquad p = -\rho g(-h)$$

$$p = b + \rho g h \qquad p = b - \rho g h \qquad p = \rho g h$$

On remarque qu'un tube en U ouvert est adapté à la mesure des

pressions voisines de la pression atmosphérique, tandis qu'un tube en U fermé est adapté à la mesure des faibles pressions.

b) A cause des difficultés d'unités, il est avantageux d'introduire la hauteur h_o d'un tube de Torricelli correspondant à la pression atmosphérique donnée. On a donc:

$$h_o = 74 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad b = \rho g h_o$$

où ρ est la masse volumique du mercure.

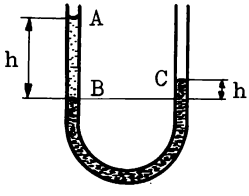
$$p = b + \rho gh = \rho gh_o + \rho gh = \rho g(h + h_o).$$

La pression p correspondrait à une hauteur $h + h_o = 79$ cm du tube de Torricelli. Cela revient à dire que

$$p = 79 \text{ cm Hg}.$$

Exemple 2: Deux liquides qui ne se mélangent pas sont placés l'un après l'autre dans un tube en U. Entre les ménisques du premier, il y a une dénivellation h. Entre ceux du second, une dénivellation h'. Etablir la relation qui existe entre leurs masses volumiques respectives ρ et ρ'. Indiquer à quoi pourrait servir ce dispositif.

△△△ La loi de croissance de la pression, appliquée à chacun des liquides, donne:



$$p_A - p_B = -\rho gh \qquad \text{et} \qquad p_C - p_B = -\rho' gh'.$$

Les pressions en A et en C sont les mêmes, puisqu'elles sont égales à la pression atmosphérique. Il en résulte:

$$\rho gh = \rho' gh'$$

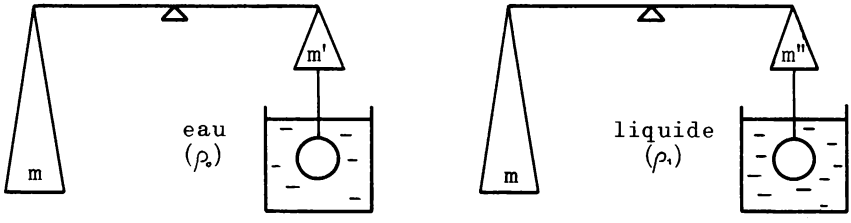
et

$$\rho h = \rho' h'.$$

Le dispositif peut servir à déterminer expérimentalement la masse volumique d'un liquide lorsqu'on connaît celle d'un autre. Il suffit de mesurer les dénivellations des ménisques.

Exemple 3: Un objet de masse m est suspendu sous un des plateaux d'une balance. On réalise l'équilibre de la balance. On place ensuite un récipient d'eau de façon à immerger complètement l'objet. Pour compenser la force d'Archimède, on met une masse m' dans le plateau auquel l'objet est suspendu. On remplace ensuite le récipient d'eau par un récipient contenant un autre liquide. On compense à nouveau la force d'Archimède à l'aide d'une masse m''. La masse volumique de l'eau

($\rho_0 = 10^3\,kg/m^3$) est connue. Les trois masses m, m', m'' sont déterminées expérimentalement. Calculer les masses volumiques de l'objet suspendu et du liquide.



△△△ Première expérience: Le poids de m' est égal en grandeur à la force d'Archimède exercée par l'eau. En désignant par V le volume de l'objet suspendu, on a:

$$m'g = \rho_0 V g \qquad \text{d'où} \qquad V = \frac{m'}{\rho_0}.$$

La masse volumique de l'objet suspendu est donc:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{m'}\rho_0$$

Deuxième expérience: Le poids de m'' est égal en grandeur à la force d'Archimède exercée par le liquide. On a donc:

$$m''g = \rho_1 V g \qquad \text{ou} \qquad m'' = \rho_1 V$$

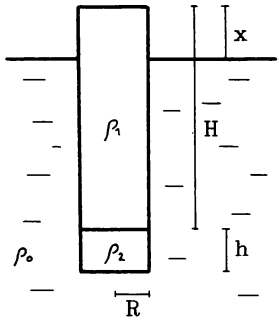
La masse volumique du liquide est donc:

$$\rho_1 = \frac{m''}{V} = \frac{m''}{m'}\rho_0$$

On aperçoit ici une méthode expérimentale simple et précise pour déterminer les masses volumiques des solides ou des liquides.

Exemple 4: Un cylindre de liège ($\rho_1 = 0{,}25\ kg/dm^3$) a une hauteur de 16 cm et un rayon de 2 cm. Il est collé coaxialement à un cylindre de fer ($\rho_2 = 7{,}86\ kg/dm^3$) de même rayon et d'une hauteur de 1 cm. Le système est mis sur l'eau. De quelle hauteur émerge le liège ?

△△△ Le système est en équilibre. Son poids total a la même grandeur que la force d'Archimède. En désignant par ρ_0 la masse volumique de l'eau, on a:



$$\rho_1 SHg + \rho_2 Shg = \rho_0 S(H + h - x)g$$

où S est la section. On en déduit:

$$\rho_1 H + \rho_2 h = \rho_0 H + \rho_0 h - \rho_0 x$$

$$x = \frac{H(\rho_0 - \rho_1) + h(\rho_0 - \rho_2)}{\rho_0}$$

Ici, les simplifications en vue nous permettent d'exprimer les masses volumiques avec n'importe quelle unité.

$$x = \frac{16\ cm(1 - 0,25)kg.dm^{-3} + 1\ cm(1 - 7,86)kg.dm^{-3}}{1\ kg.dm^{-3}}$$

$$= 12\ cm - 6,86\ cm = 5,14\ cm$$

Le liège émerge donc de 5,14 cm.

Exemple 5*: Déterminer la pression atmosphérique en fonction de l'altitude. On suppose que la température de l'air est la même en tout point. Introduire les paramètres utiles.

△△△ La loi de croissance de la pression ne peut s'appliquer qu'à des points voisins, puisque la masse volumique varie. Ecrivons-la sous la forme différentielle:

$$dp = - \rho g dz.$$

Pour calculer la masse volumique de l'air, considérons une quantité d'air de volume V et de masse m. Soient n le nombre de moles correspondant et M la masse molaire moyenne de l'air.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}.$$

La loi du gaz parfait,

$$pV = nRT,$$

permet d'exprimer ρ en fonction de la pression.

$$\rho = nM.\frac{p}{nRT} = \frac{Mp}{RT}.$$

On constate au passage que la masse volumique est proportionnelle à la pression. La loi de croissance devient alors:

$$dp = - \frac{Mpg}{RT}.dz \qquad (1)$$

C'est une équation différentielle pour la fonction p = f(z). Si on l'écrit sous la forme

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{Mg}{RT} . p$$

on voit qu'elle exprime que la dérivée de la pression est proportionnelle à la pression. C'est un trait caractéristique des fonctions exponentielles. L'équation (1) peut se résoudre comme suit. RT/Mg a les dimensions d'une longueur. Pour simplifier l'écriture, posons donc:

$$\frac{RT}{Mg} = L.$$

L'équation (1) s'écrit alors: $\frac{dp}{p} = - \frac{dz}{L}$.

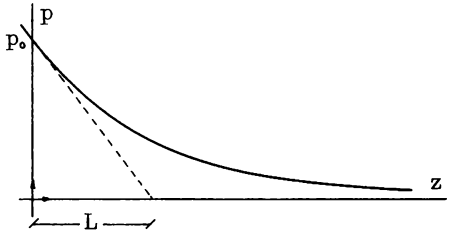
On en déduit: $\int \frac{dp}{p} = \int - \frac{dz}{L} + C$ (C = constante)

$$\ln p = - \frac{z}{L} + C$$

$$p = e^{(- \frac{z}{L} + C)} = e^{C} . e^{- \frac{z}{L}}$$

e^{C} est la valeur que prend p en z = 0. C'est la pression à l'altitude zéro. Désignons-la par p_o. La pression à une altitude quelconque est donc

$$p = p_o . e^{- \frac{z}{L}}.$$



C'est une fonction exponentielle décroissante. La longueur caractéristique L est égale, ainsi qu'on le démontre aisément, à la sous-tangente de la courbe. Pour une température de 0 °C, cette longueur vaut:

$$L = \frac{8{,}31 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1} . 273 \text{ }^{o}\text{K}}{29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} . 9{,}81 \text{ ms}^{-2}} = 7970 \text{ m} \cong 8 \text{ km}.$$

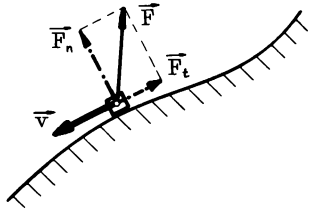
L'hypothèse d'une température constante et celle d'un g constant ne sont pas très bien réalisées en fait. Ce résultat n'a donc qu'une valeur d'ordre de grandeur.

Chapitre 11

FROTTEMENT

§ 65* Frottement de glissement

Lorsqu'un objet glisse sur une surface, celle-ci exerce une force sur lui. Selon la définition donnée au paragraphe 42, on appelle frottement la composante tangentielle de cette force. Le frottement tire son origine des interactions entre les molécules des deux corps en contact. Ces interactions sont trop complexes pour être analysées, mais on peut étudier expérimentalement leurs effets globaux. Il est possible alors d'énoncer les lois approximatives que voici:



1. Le frottement de glissement est parallèle à la vitesse et de sens contraire.

2. Il est proportionnel à la composante normale de la force exercée par la surface.

Ce dernier énoncé signifie que le frottement est d'autant plus grand que l'objet est plus fortement pressé contre la surface. C'est un fait d'expérience courante. Les composantes normale et tangentielle de la force exercée par la surface sur l'objet qui glisse satisfont donc à la relation suivante, qu'on appelle loi du frottement de glissement:

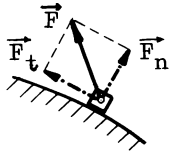
$$F_t = \mu F_n.$$

Cette égalité ne peut s'écrire vectoriellement puisque $\vec{F}_t$ et $\vec{F}_n$ ne sont pas parallèles. μ est un coefficient de proportionnalité appelé coefficient de frottement de glissement. Il dépend essentiellement de la nature des surfaces en contact, de leur état de poli, de leur degré d'oxydation, de leur propreté, etc. Pour ces raisons, il est difficile de donner des va-

leurs numériques quelque peu sûres. Pour des surfaces non lubrifiées, μ se situe en général entre 0,1 et 1. Il diminue légèrement lorsque la vitesse augmente.

§ 66* Frottement statique

Lorsqu'un objet est immobile et appuyé contre une surface, celle-ci exerce une force sur lui. Par définition, la composante tangentielle de cette force est appelée frottement, ou frottement statique, puisque le système est en équilibre.



Supposons que l'objet soit sollicité par des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... de la part de divers agents, et par la force $\vec{F}$ de la part de la surface contre laquelle il est appuyé. L'équilibre permet d'écrire:

$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = \vec{0}.$$

Les termes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... étant supposés connus, cette équation détermine $\vec{F}$, et ses composantes. On voit que le frottement statique est déterminé par l'équation de Newton et non par une loi de frottement. (Cf § 45, exemple 5, p. 103.)

Il existe pourtant une telle loi. Mais elle ne fixe rien sur le frottement qui existe effectivement dans telle ou telle situation d'équilibre. Elle indique seulement la grandeur maximale que peut avoir la force de frottement. Pour cette raison, elle a la forme d'une inéquation.

L'expérience permet d'énoncer la loi approximative suivante:

> Le frottement statique maximal est proportionnel à la composante normale de la force exercée par la surface.

Les composantes tangentielle et normale de la force exercée par la surface sur l'objet satisfont donc à la relation suivante, qu'on appelle loi du frottement statique:

$$\boxed{F_t \leq \mu_o F_n.}$$

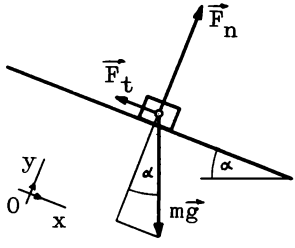
μ_o est le coefficient de frottement statique. Comme μ, il dépend essentiellement de la nature des surfaces en contact, et de leur état. Des poussières et des traces de graisse peuvent avoir une grande influence sur sa valeur. μ_o est en général

compris, pour des surfaces sèches, entre 0,1 et 1. Il semblerait que, pour des surfaces données, μ_s soit légèrement supérieur à μ.

§ 67* Exemples de calcul - Frottement sec

Exemple 1*: On fait glisser un objet sur un plan incliné où il subit un frottement. Pour quelle inclinaison du plan descend-il à vitesse constante ?

△△△ On peut considérer l'objet comme sollicité par trois forces: son poids et les composantes normale et tangentielle de la force exercée par le plan. Son accélération étant nulle, on a:



$$m\vec{g} + \vec{F}_t + \vec{F}_n = \vec{0}.$$

Par projection sur des axes bien choisis, on obtient:

$$mg \sin\alpha - F_t = 0$$

et $$- mg \cos\alpha + F_n = 0,$$

d'où $F_t = mg \sin\alpha$ et $F_n = mg \cos\alpha$.

D'après la loi du frottement de glissement, on a:

$$F_t = \mu F_n$$

ou $$mg \sin\alpha = \mu mg \cos\alpha$$

et $$tg\alpha = \mu.$$

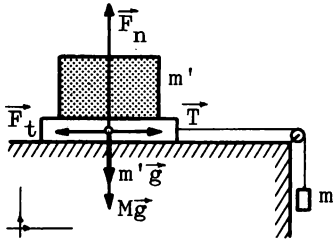
L'objet descend donc à vitesse constante lorsque la tangente de l'inclinaison du plan est égale au coefficient de frottement de glissement. On a là une façon très simple de mesurer μ.

Si l'angle α correspondant au mouvement uniforme n'est pas modifié lorsqu'on place des surcharges sur l'objet qui glisse, cela vérifie la proportionnalité du frottement et de la force normale.

Exemple 2*: Une planchette de 500 g repose sur une table. Elle est tirée horizontalement par un fil passant sur une poulie. A l'autre extrémité du fil, un objet de 1 kg est attaché. Le coefficient de frottement statique de la planchette sur la table est de 0,25. Quelle surcharge faut-il placer sur elle

pour empêcher le glissement ?

△△△ Désignons par M la masse de la planchette, par m celle de l'objet suspendu au fil et par m' celle de la surcharge. La planchette est en équilibre sous l'influence de cinq forces: son poids $M\vec{g}$, une force égale à $m'\vec{g}$ exercée par la surcharge, une force de traction $\vec{T}$ (de grandeur mg) exercée par le fil, une force de soutien $\vec{F}_n$ et une force de frottement $\vec{F}_t$. On a:



$$M\vec{g} + m'\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_n + \vec{F}_t = \vec{0}$$

d'où $T - F_t = 0$ et $-Mg - m'g + F_n = 0$,

$F_t = mg$ et $F_n = (M + m')g$.

D'après la loi du frottement statique, cet équilibre n'est possible que si

$$F_t \leq \mu_s F_n$$

ou $$mg \leq \mu_s(M + m')g.$$

En résolvant cette inéquation par rapport à m', on obtient:

$$m' \geq \frac{m}{\mu_s} - M = \frac{1\ \text{kg}}{0{,}25} - 0{,}5\ \text{kg} = 3{,}5\ \text{kg}.$$

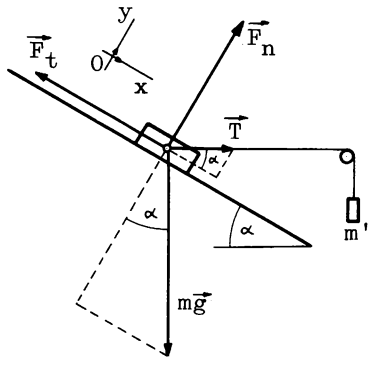
La surcharge doit avoir une masse d'au moins 3,5 kg.

Exemple 3*: Un objet de masse m repose sur un plan d'inclinaison α. Il est tiré par un fil horizontal auquel est suspendu un contrepoids. (Le fil se trouve dans un plan vertical contenant une ligne de plus grande pente du plan incliné.) Connaissant le coefficient de frottement μ_s de l'objet sur le plan, calculer la plus grande valeur de la masse m' du contrepoids qui soit compatible avec l'équilibre.
Application numérique: m = 12 kg, $\alpha = 30^\circ$, $\mu_s = 0{,}7$.

△△△ L'objet est sollicité par quatre forces: son poids $m\vec{g}$, une force de soutien $\vec{F}_n$ perpendiculaire au plan, une force de frottement $\vec{F}_t$ et une force de traction $\vec{T}$ exercée par le fil. Comme il est en équilibre, l'équation de Newton s'écrit:

$$m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{F}_t + \vec{T} = \vec{0}.$$

De cette équation, on déduit par projections sur les axes Ox et Oy:



$$mg \sin\alpha - F_t + T \cos\alpha = 0$$

$$- mg \cos\alpha + F_n + T \sin\alpha = 0,$$

d'où $F_t = mg \sin\alpha + T \cos\alpha$

et $F_n = mg \cos\alpha - T \sin\alpha$.

(Nous avons choisi des axes respectivement parallèles et perpendiculaires aux deux forces inconnues, pour que les équations obtenues par projection ne contiennent chacune qu'une seule inconnue. Le lecteur n'appréciera l'avantage de ce choix judicieux que s'il essaye de placer ses axes autrement.)

Le système étant en équilibre, le fil soutient le contrepoids avec une force de grandeur m'g. La traction du fil vaut donc m'g et on a:

$$F_t = mg \sin\alpha + m'g \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad F_n = mg \cos\alpha - m'g \sin\alpha.$$

La loi du frottement a la forme d'une condition de possibilité. Elle s'écrit:

$$F_t \leq \mu_o F_n$$

ou $$mg \sin\alpha + m'g \cos\alpha \leq \mu_o (mg \cos\alpha - m'g \sin\alpha).$$

En résolvant cette inéquation par rapport à m', on obtient:

$$m'(\cos\alpha + \mu_o \sin\alpha) \leq m(\mu_o \cos\alpha - \sin\alpha)$$

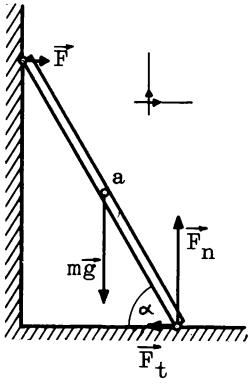
$$m' \leq \frac{\mu_o \cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_o \sin\alpha} m = \frac{\mu_o - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \mu_o \operatorname{tg}\alpha} m.$$

Numériquement, on a: $m' \leq 1{,}05$ kg.

Exemple 4*: Une tige est posée sur le sol et appuyée contre un mur. Au contact du mur, on admet que le frottement est négligeable. Au contact du sol, le coefficient de frottement statique vaut 0,8. Quelle est l'inclinaison minimale de la tige ?

△△△ La tige subit quatre forces: son poids, une force horizontale de la part du mur, une force de soutien et une force

de frottement de la part du sol. Soit a la longueur de la tige. Choisissons le pied de la tige comme origine et écrivons les conditions d'équilibre.



1ère condition:

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_n + \vec{F}_t = \vec{0}$$

d'où

$$-mg + F_n = 0, \qquad (1)$$

$$F - F_t = 0. \qquad (2)$$

2e condition:

$$Fa \sin\alpha = mg \frac{a}{2} \cos\alpha. \qquad (3)$$

De ces trois équations, on déduit:

$$F_t = F = \frac{mg \cos\alpha}{2 \sin\alpha} = \frac{mg}{2 \operatorname{tg}\alpha} \qquad \text{et} \qquad F_n = mg.$$

Selon la loi du frottement, l'équilibre n'est possible que si

$$F_t \leq \mu_0 F_n, \qquad \frac{mg}{2 \operatorname{tg}\alpha} \leq \mu_0 mg$$

$$\operatorname{tg}\alpha \geq \frac{1}{2\mu_0} = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

ou

$$\alpha \geq 32^\circ.$$

L'inclinaison minimale de la tige est de 32°.

§ 68* Frottement dans un fluide

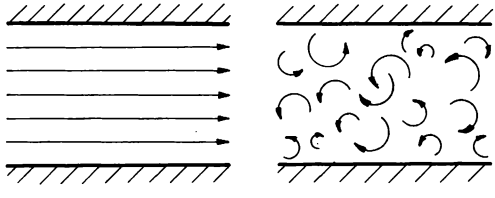
Lorsqu'un objet se déplace dans un fluide, il subit des forces de la part de celui-ci. Un avion, par exemple, subit de la part de l'air une force qui le soutient (la portance) et une force qui le retient (la traînée ou le frottement). L'étude de ces forces, en fonction de la forme de l'objet et de sa vitesse, est d'une grande importance technique. Cette étude, qui ressort de l'aéro- ou de l'hydrodynamique, est très complexe, et nous ne pourrons qu'en effleurer les bords. Il est néanmoins remarquable que, dans bien des cas, des lois relativement simples puissent exprimer assez valablement les forces exercées par le fluide sur l'objet en mouvement. Tout comme pour les frottements exercés par un solide sur un solide, il va s'agir ici de lois approximatives. Quant à leur caractère, ces lois sont bien différentes des lois fondamenta-

les (équation de Newton, conservation de la quantité de mouvement, etc). Les unes sont des lois simples concernant des systèmes simples; elles ont un domaine de validité extrêmement large et sont vérifiées par l'expérience avec une grande précision. Les autres sont des lois assez simples concernant des systèmes compliqués; elles ont un domaine de validité restreint et ne sont vérifiées par l'expérience que de façon très approximative.

Il est équivalent de considérer un corps en mouvement dans un fluide immobile, ou un corps immobile dans un fluide en mouvement. Ce n'est qu'une affaire de référentiel. Suivant les cas, nous envisagerons l'un ou l'autre des points de vue. Mais précisons que lorsqu'un fluide contourne un objet (immobile, par convention), dans le voisinage de celui-ci la vitesse du fluide n'est pas la même en tous les points. Aussi lorsque nous parlerons de la vitesse du fluide, il s'agira toujours de la vitesse à grande distance de l'objet.

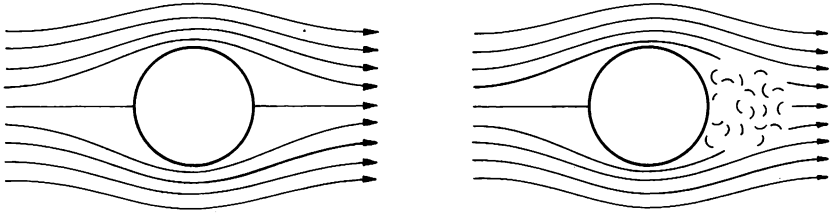
Lorsqu'un fluide s'écoule lentement, on peut le considérer comme formé de couches parallèles glissant l'une sur l'autre. L'écoulement est dit laminaire ou lamellaire. Il existe une valeur critique de la vitesse au-dessus de laquelle l'écoulement laminaire est impossible. Il apparaît des tourbillons. Lorsqu'il en est ainsi, l'écoulement est dit turbulent. La vitesse critique dépend du fluide et de la géométrie du système.

La figure ci-dessous présente l'écoulement d'un fluide dans un tuyau, en régime laminaire et en régime turbulent. Dans le premier cas, les lignes dessinées représentent les trajectoires des particules de fluide: les lignes de courant. En chaque point, la vitesse du fluide garde la même valeur au cours du temps. Elle est la plus grande au milieu du tuyau. Au voisinage des bords, elle tend vers zéro. En régime turbulent, les différentes parties du fluide se mélangent continuellement. En un point donné, la vitesse varie au cours du temps. Elle est tantôt dans une direction tantôt dans une autre. Sa grandeur aussi varie.



Un fluide en mouvement exerce une force sur tout obstacle. L'origine de cette force diffère suivant le caractère de l'écoulement. En régime laminaire, elle est produite par la viscosité du fluide. La viscosité est, en quelque sorte, le

frottement de glissement d'une couche de fluide sur sa voisine. En régime turbulent, la force a sa cause dans l'établissement de tourbillons derrière l'obstacle. La loi exprimant la force exercée sur l'obstacle a une forme différente suivant le cas.



Nous nous limiterons au cas où l'objet possède une symétrie de révolution, et où l'axe est parallèle à la vitesse relative. (Rappelons qu'on dit qu'un objet possède une symétrie de révolution s'il existe une droite telle que toute rotation du corps autour de celle-ci superpose le corps à lui-même.) La résultante de l'ensemble des forces exercées par le fluide sur l'objet peut s'exprimer comme la somme de deux forces seulement: la <u>force d'Archimède</u>, qui ne dépend pas du mouvement, et une <u>force de frottement</u>, qui dépend de la vitesse. La force d'Archimède (§ 61) est verticale, orientée vers le haut, et a pour grandeur:

$$F_A = \rho V g,$$

où ρ est la masse volumique du fluide et V le volume de l'objet. C'est le poids du fluide déplacé. La force de frottement est parallèle à la vitesse relative. Elle s'exprime par les formules:

En régime laminaire:

$$F = kR\eta v.$$

En régime turbulent:

$$F = \tfrac{1}{2}CS\rho v^2.$$

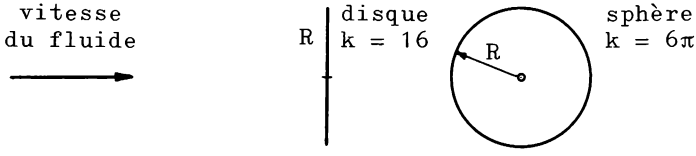
Nous ne pouvons démontrer ces formules. Contentons-nous de les commenter et d'indiquer la signification des grandeurs qu'elles contiennent.

<u>En régime laminaire</u>, c'est-à-dire aux faibles vitesses, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse. η est un coefficient qu'on appelle <u>viscosité</u> du fluide. Dans le système international d'unités, il s'exprime en <u>décapoises</u>.

Substance	Viscosité (à 20 °C)
Air	$1{,}8.10^{-5}$ kg/ms
Ether	$2{,}2.10^{-4}$
Eau	$1{,}0.10^{-3}$
Mercure	$1{,}6.10^{-3}$
Huile	$1{,}0.10^{-1}$
Glycérine	1,0

$$1 \text{ décapoise} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}.$$

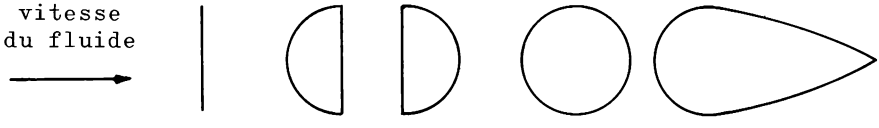
Dans les fluides très visqueux (huile, glycérine, mélasse, etc), le frottement est élevé, puisque, d'après la formule ci-dessus, le frottement est proportionnel à la viscosité. R est le rayon maximal de l'objet, compté perpendiculairement depuis l'axe de révolution. k est une constante de proportionnalité qui dépend de la forme de l'objet. Pour le disque et la sphère, k prend les valeurs suivantes:



La force de frottement qui s'exerce sur une sphère, en régime laminaire, s'exprime donc par la formule suivante, connue sous le nom de formule de Stokes:

$$F = 6\pi R\eta v.$$

En régime turbulent, c'est-à-dire aux vitesses plus élevées, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse (et non plus à la vitesse). En outre elle croît avec la masse des tourbillons qui apparaissent derrière l'obstacle. Pour cette raison, elle est proportionnelle à la masse volumique ρ du fluide et à la section apparente S de l'objet. Nous appelons ainsi l'aire de sa projection sur un plan perpendiculaire à la vitesse. Elle dépend également d'un coefficient de forme C, propre à l'objet. Ce coefficient, qui est un nombre pur, est grand pour les objets qui créent une grande zone de tourbillons.



C =	1,32	1,12	0,34	0,24	0,04

La forme qui offre la plus faible résistance est dite fuselée

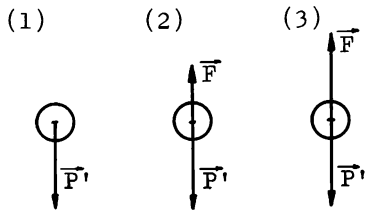
ou aérodynamique. C'est approximativement celle du corps des poissons et des oiseaux.

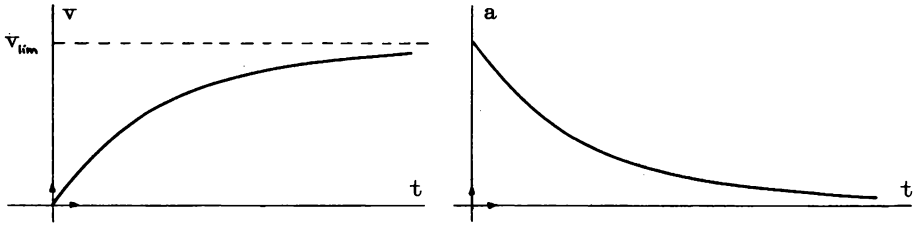
Aux vitesses faibles, le frottement est donc proportionnel à la vitesse. A une certaine vitesse, dite critique, l'écoulement passe du régime laminaire au régime turbulent, et le frottement devient proportionnel au carré de la vitesse. La formule correspondante est valable dans un certain intervalle. Mais si la vitesse devient trop grande, elle perd toute validité. C'est le cas, par exemple, pour un mobile qui se déplace dans l'air à une vitesse égale ou supérieure à celle du son.

§ 69* Vitesse limite de chute

Examinons le mouvement d'un corps qui tombe verticalement dans un fluide. Trois forces s'exercent sur lui: deux forces constantes - son poids $m\vec{g}$ et la force d'Archimède $\vec{F}_A$ - et une force qui croît avec la vitesse - le frottement $\vec{F}$. Désignons par $\vec{P}'$, et appelons poids réduit, la somme des deux premières forces. Ainsi on peut considérer le corps comme sollicité par deux forces, $\vec{P}'$ et $\vec{F}$. Nous supposons que le corps possède une symétrie de révolution d'axe vertical, de sorte que le frottement est vertical.

La vitesse initiale de l'objet est nulle. A l'instant du départ, (situation 1), il est sollicité par une seule force, son poids réduit $\vec{P}'$. Sous cette influence, il subit une accélération - égale à $\vec{g}$ si la force d'Archimède est négligeable. Sa vitesse croît. Dès que la vitesse est différente de zéro (situation 2), la force de frottement apparaît. La résultante des forces qui s'exercent sur le mobile est $\vec{P}' + \vec{F}$. Elle est dirigée vers le bas et sa grandeur vaut P' - F. L'objet subit encore une accélération et sa vitesse augmente encore. Au fur et à mesure que la vitesse croît, la résistance offerte par le fluide croît. Cela fait décroître la résultante des forces et, par conséquent, l'accélération. La vitesse croît donc de plus en plus lentement. Au bout d'un certain temps (situation 3), la vitesse est telle que la force de frottement est aussi grande que le poids réduit. La résultante des forces est alors nulle. Il en est de même de l'accélération. Le corps poursuit sa route à vitesse constante. On appelle celle-ci vitesse limite de chute.





La vitesse limite de chute est caractérisée par la condition dynamique:

$$\vec{P}' + \vec{F} = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F} = \vec{0}.$$

En projetant sur un axe vertical, on obtient

$$- mg + F_A + F = 0. \qquad (1)$$

Calculons la vitesse limite dans le cas où l'objet qui tombe est une sphère. Désignons par ρ la masse volumique du fluide et par η sa viscosité. Désignons par ρ_o la masse volumique de l'objet et par R son rayon.

Son volume vaut $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,

sa masse, $m = \rho_o V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$

et son poids, $mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o g$.

La force d'Archimède, égale au poids du fluide déplacé, vaut

$$F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g.$$

Si le <u>régime</u> est <u>laminaire</u>, la force de frottement vaut

$$F = 6\pi R \eta v.$$

L'équation (1) devient alors:

$$- \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o g + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi R \eta v = 0.$$

D'où la vitesse limite: $v = \frac{2R^2 g(\rho_o - \rho)}{9\eta}$.

Si le régime est turbulent, la force de frottement vaut

$$F = \tfrac{1}{2}CS\rho v^2 = \tfrac{1}{2}.0,24\pi R^2\rho v^2 = 0,12\pi R^2\rho v^2$$

car la section apparente est l'aire d'un cercle de rayon R. L'équation (1) devient alors:

$$-\tfrac{4}{3}\pi R^3\rho_0 g + \tfrac{4}{3}\pi R^3\rho g + 0,12\pi R^2\rho v^2 = 0.$$

D'où la vitesse limite: $v = \sqrt{\dfrac{Rg(\rho_0 - \rho)}{0,09\,\rho}}$.

Dans les deux cas, la vitesse limite croît avec R, quoique de façon différente. Cela indique que dans un fluide, un gros objet tombe plus vite qu'un petit objet (toutes autres choses égales par ailleurs). De très petits objets ont une vitesse limite très faible. Dans l'air, les petites gouttes d'eau qui constituent les nuages descendent à une vitesse de l'ordre d'un centimètre par seconde. Cela explique pourquoi les nuages peuvent rester très longtemps dans le ciel.

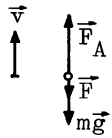
Il est possible de trier des petits grains selon leur ordre de grosseur (par exemple de la poudre d'émeri) en laissant tomber le mélange dans un liquide visqueux. Après un certain temps, on divise le liquide en tranches par des plans horizontaux. Les couches les plus profondes contiennent les grains les plus gros, les couches supérieures les grains les plus petits. Ce procédé est connu dans l'industrie sous le nom de lévigation.

Quelle que soit la sorte d'écoulement, on voit aussi que la vitesse limite croît avec g. Dans les centrifugeuses (§ 79), on peut artificiellement augmenter g de façon presque illimitée. Cela permet d'accélérer des processus de décantation ou de séparation de certaines gouttelettes de liquide en suspension dans un autre. Le lait contient des gouttelettes de crème. La force d'Archimède dépassant ici le poids ($\rho < \rho_0$), la vitesse limite est orientée vers le haut. Pour recueillir la crème, on peut soit laisser le lait soumis quelques heures à l'influence du g naturel, soit le placer dans une centrifugeuse où, grâce à un g immense, la séparation se fait en quelques secondes.

§ 70* Exemples de calcul - Frottement dans un fluide

Exemple 1*: Calculer la vitesse limite d'une gouttelette d'huile dans de l'eau, et d'une gouttelette d'eau dans de l'huile. L'écoulement est laminaire. Rayon des gouttelettes: 0,1 mm. Masse volumique de l'huile: 0,92 kg/dm³.

△△△ a) Gouttelette d'huile dans de l'eau.



La force d'Archimède dépasse le poids de la goutte. Celle-ci s'élève, et la force de frottement est orientée vers le bas. Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F} = \vec{0}$$

$$- mg + F_A - F = 0$$

$$- \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h g + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g - 6\pi R \eta_e v = 0$$

$$v = \frac{2R^2 g(\rho_e - \rho_h)}{9\eta_e}.$$

Numériquement:

$$v = \frac{2.10^{-8}\ m^2 .10\ ms^{-2}(1 - 0,92).10^3\ kgm^{-3}}{9.10^{-3}\ kgm^{-1}s^{-1}} = 1,8.10^{-3}\ \frac{m}{s}.$$

b) Gouttelette d'eau dans de l'huile.

C'est exactement le cas traité dans le cours (§ 69). On a:

$$v = \frac{2R^2 g(\rho_e - \rho_h)}{9\eta_h}.$$

Numériquement:

$$v = \frac{2.10^{-8}\ m^2 .10\ ms^{-2}(1 - 0,92).10^3\ kgm^{-3}}{9.10^{-1}\ kgm^{-1}s^{-1}} = 1,8.10^{-5}\ \frac{m}{s}.$$

La vitesse limite de la goutte d'eau est 100 fois plus petite que celle de la goutte d'huile.

Exemple 2*: Une voiture roule à une vitesse de 150 km/h sur une route horizontale. La force de propulsion est de 1300 N. On estime que la force de frottement, qui est aussi de 1300 N, est due pour 1000 N à la résistance de l'air et pour 300 N au frottement de roulement. La section apparente est de 2 m². Calculer le coefficient de forme de la voiture.

△△△ L'écoulement est certainement turbulent. Bien que le corps n'ait pas une symétrie de révolution, on admet que le frottement de l'air peut s'exprimer approximativement par la relation

$$F = \tfrac{1}{2} C S \rho v^2.$$

Le coefficient de forme de la voiture est alors:

$$C = \frac{2F}{S\rho v^2}$$

Numériquement,

$$C = \frac{2.10^3\ N}{2\ m^2 .1,2\ kgm^{-3}.(42\ ms^{-1})^2} = 0,47.$$

Exemple 3*: Estimer la vitesse limite d'un parachutiste, si le parachute est ouvert et s'il est fermé.

△△△ Admettons les valeurs numériques suivantes. Masse du système: 100 kg, masse volumique de l'air: 1,2 kgm^{-3}. Avec parachute ouvert: section apparente: 80 m^2, coefficient de forme: 1,3. Avec parachute fermé: section apparente: 0,5 m^2, coefficient de forme: 0,7.

La force d'Archimède est négligeable devant le poids du parachutiste. La vitesse limite est atteinte lorsque le frottement a la même grandeur que le poids. Comme l'écoulement est turbulent, on peut écrire:

$$\tfrac{1}{2}CS\rho v^2 = mg.$$

On en tire $$v = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}.$$

Avec parachute ouvert, on a:

$$v = \sqrt{\frac{2.10^2\ kg.10\ ms^{-2}}{1,3.8.10\ m^2.1,2\ kgm^{-3}}} = \sqrt{16\ \frac{m^2}{s^2}} = 4\ \frac{m}{s}.$$

Avec parachute fermé, on a (en admettant que malgré l'absence de symétrie de révolution, la formule soit à peu près valable):

$$v = \sqrt{\frac{2.10^2\ kg.10\ ms^{-2}}{0,7.0,5\ m^2.1,2\ kgm^{-3}}} = \sqrt{4800\ \frac{m^2}{s^2}} = 69\ \frac{m}{s}.$$

On voit l'efficacité du parachute!

Exemple 4*: On laisse tomber une bille d'acier de 3 mm de diamètre dans un pot de mélasse. Sa vitesse limite est de 2 mm/s. La masse volumique de la mélasse est de 1,5 kg/dm^3. Calculer la viscosité de cette substance.

△△△ La vitesse étant très faible, l'écoulement est laminaire. A la vitesse limite, le poids, la force d'Archimède et le

frottement ont une somme nulle.

$$m\vec{g} + \vec{F_A} + \vec{F} = \vec{0}.$$

La première de ces forces est dirigée vers le bas, les deux autres, vers le haut. On a donc

$$mg = F_A + F$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m g + 6\pi R \eta_m v$$

La viscosité de la mélasse est donc

$$\eta_m = \frac{2R^2 g(\rho_a - \rho_m)}{9v}.$$

Numériquement, on a:

$$R^2 = (1,5.10^{-3}\ m)^2 = 2,25.10^{-6}\ m^2$$

$$\rho_a - \rho_m = (7,7 - 1,5).10^3\ kgm^{-3} = 6,2.10^3\ kgm^{-3}$$

$$\eta_m = \frac{2.2,25.10^{-6}\ m^2.10\ ms^{-2}.6,4.10^3\ kgm^{-3}}{9.2.10^{-3}\ ms^{-1}} = 16 \text{ décapoises.}$$

Chapitre 12

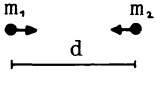
GRAVITATION

§ 71 Loi de la gravitation

Newton formula l'hypothèse que tous les corps exercent des forces d'attraction les uns sur les autres, par le seul fait de leur existence. La manifestation la plus immédiate de cette force est le poids des corps, attraction de la terre sur eux. Les astres s'attirent aussi. La force d'attraction de la terre sur la lune, ou du soleil sur les planètes, est la force centripète responsable de l'accélération de ces satellites. L'attraction de la lune sur la terre est mise en évidence dans les marées. Newton montra que les mouvements des planètes pouvaient être entièrement expliqués si l'on admettait la loi suivante:

> Loi de la gravitation: Tous les corps s'attirent. La force d'attraction est proportionnelle à leurs masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

Si deux points matériels de masses m_1 et m_2 sont séparés par une distance d, les forces de gravitation qu'ils exercent l'un sur l'autre ont pour grandeur:



$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

G est une constante universelle qu'on nomme constante de gravitation. Dans le SI, sa valeur est:

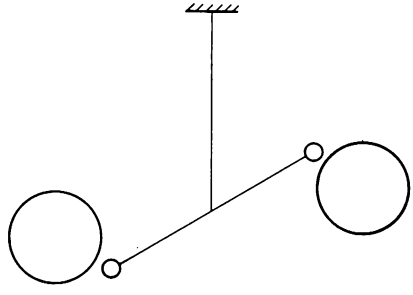
$$G = 6{,}67.10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}.$$

L'extrême petitesse de cette constante a pour conséquence qu'entre des objets à l'échelle humaine, la force de gravita-

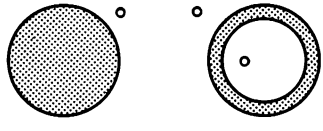
tion est presque toujours négligeable. Si l'une des deux masses (au moins) est grande, la petitesse de G peut être compensée, et la force gravifique être observable. Il en est ainsi pour le poids des objets sur la terre.

La formule exprimant la loi de la gravitation est symétrique par rapport aux deux masses. Les forces exercées par un des corps sur l'autre et par celui-ci sur le premier ont la même grandeur, conformément au principe de l'action et de la réaction. Comme l'exige aussi ce principe, elles sont directement opposées.

La valeur de la constante de gravitation n'a jamais été connue de Newton. Elle a été mesurée pour la première fois par Cavendish, environ un siècle après la publication des lois de Newton. Cette mesure est fondée sur l'attraction de deux masses à l'échelle humaine. Un dispositif très fin met cette petite force en évidence: c'est le pendule de Cavendish, qui est un pendule de torsion particulier (§ 52). Deux petites boules sont situées aux extrémités d'une barre. Celle-ci est suspendue en son centre à un fil métallique très fin. Les petites boules sont attirées par deux grosses boules fixes, placées comme l'indique le dessin. (Les centres des quatre boules sont dans un même plan horizontal.) On détermine préalablement la constante de torsion du fil. On repère la position d'équilibre des petites boules en l'absence et en la présence des grandes. Connaissant ainsi l'angle de torsion provoqué par l'attraction, on peut calculer le moment des forces gravifiques. Il suffit alors de mesurer la distance entre les grandes et les petites sphères pour pouvoir calculer les forces gravifiques et en déduire G.



On peut démontrer qu'une boule homogène se comporte, quant aux forces de gravitation, comme un point matériel de même masse situé en son centre. La même règle est valable pour une boule creuse, si le second objet est placé à l'extérieur. En revanche, à l'intérieur d'une boule creuse, les actions gravifiques sont nulles.

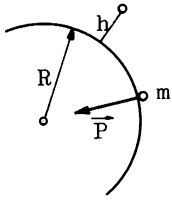


§ 72 Pesanteur

Supposons, ce qui n'est vrai qu'approximativement, que la terre est une sphère parfaite et homogène. Soient R son rayon et M sa masse. Un objet de masse m, situé à la surface de la terre, subit une force de gravitation dirigée vers le centre de la terre et ayant pour grandeur:

$$P = \frac{GMm}{R^2}.$$

Nous désignons cette force par $\vec{P}$. C'est, par définition, le poids de l'objet. La relation ci-dessus montre que le poids d'un corps et sa masse sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est GM/R^2. On voit aussi, ce qui avait été utilisé précédemment (§ 39), que le poids d'un corps est indépendant de son état de mouvement.



Lorsque l'objet est en chute libre, $\vec{P}$ est la seule force qui s'exerce sur lui. D'après l'équation de Newton, il subit une accélération dont la grandeur est:

$$a = \frac{P}{m} = \frac{GM}{R^2}.$$

En un lieu de la terre, cette accélération a une grandeur fixe et une direction fixe, - la direction du centre de la terre. On la désigne par $\vec{g}$. On a ainsi:

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}.}$$

Sur la base des lois fondamentales de la mécanique, et non plus seulement sur la base de constatations expérimentales (§ 27), on conclut qu'un corps en chute libre à la surface de la terre a un mouvement uniformément accéléré. L'accélération est verticale, orientée vers le bas. Elle est indépendante du corps en chute et a la grandeur g indiquée ci-dessus. On la nomme accélération de la pesanteur.

Le poids d'un corps et sa masse sont donc liés par la relation

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}.}$$

La valeur numérique de g peut être calculée, sachant que la masse de la terre est $5{,}99.10^{24}$ kg, et son rayon moyen 6370 km. On a:

$$g = \frac{6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{Nm^2\,kg^{-2}}.5{,}99.10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6{,}37.10^{6}\ \mathrm{m})^2} = 9{,}85\ \mathrm{m/s^2}.$$

Les petites différences entre cette valeur calculée et les valeurs qu'on trouve expérimentalement (voir le tableau ci-dessous) proviennent d'une part de ce que la terre n'est pas rigoureusement sphérique ni homogène et d'autre part de ce que les mesures qu'on fait sur la terre sont réalisées dans un référentiel qui n'est pas tout à fait galiléen, à cause de la rotation de la terre. (Voir § 79, no 3.)

Valeurs expérimentales de g		
Aux pôles	(à l'altitude de 0 m):	9,83221 m/s²
A l'équateur	"	9,78049
A 45° de latitude	"	9,80629
A Zürich		9,80665
A Paris		9,8094

A une altitude h au-dessus de la surface de la terre, l'accélération de la pesanteur vaut

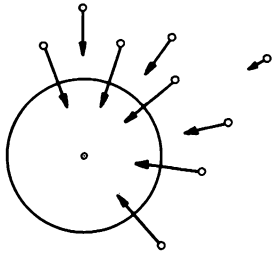
$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{(R+h)^2} = g\cdot\frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

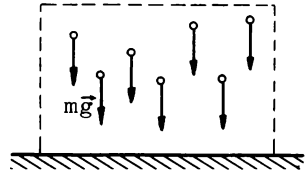
§ 73 Notion de champ

La physique parle de champ toutes les fois qu'elle a affaire à une fonction de point. Si à chaque point correspond un nombre, on a un champ scalaire. (Exemple: à tout point de l'atmosphère, on peut associer la température qui y règne. C'est un champ de température.) Si à chaque point correspond un vecteur, on a un champ vectoriel. (Exemple: à tout point de l'atmosphère, on peut associer la vitesse du vent qui y souffle. C'est un champ de vitesse.)

En chaque point de l'espace entourant la terre, on peut considérer la force de gravitation qui s'exercerait sur un objet de masse m, à supposer qu'on en mette un. L'ensemble de ces forces constitue un champ de force. Comme il s'agit de forces de gravitation, nous l'appellerons champ de gravitation terrestre.

Dans une portion limitée de l'espace, au voisinage de la terre, les vecteurs force peuvent être considérés comme étant tous égaux. On exprime cette propriété en disant que le champ est uniforme. Pour des raisons de commodité, ce champ de gravitation particulier sera appelé champ de la pesanteur.



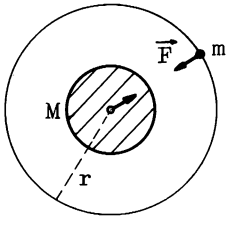


N.B. Dans divers ouvrages, ce n'est pas le champ des forces de gravitation qui est appelé champ de gravitation, mais le champ des accélérations résultant de ces forces. L'étudiant y sera attentif, pour éviter toute confusion.

§ 74 Satellite sur orbite circulaire

A partir des lois fondamentales, il est possible de montrer que lorsqu'un mobile se déplace dans le champ de gravitation d'un astre, sa trajectoire est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole). Tout satellite d'un astre, c'est-à-dire tout objet qui tourne autour de lui, décrit une ellipse, puisque c'est la seule des trois courbes qui est fermée.

Nous examinerons le cas particulier où l'ellipse est un cercle. Cherchons à calculer la vitesse et le temps de révolution d'un satellite décrivant une trajectoire circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M. Nous supposons que la masse de l'astre est beaucoup plus grande que celle du satellite. Ainsi les forces de gravitation exercées mutuellement par les corps produisent une accélération négligeable dans le cas de l'astre, non négligeable dans le cas du satellite. Nous supposons en outre que l'astre ne subit pas de forces importantes de la part d'autres corps, de sorte qu'un référentiel lié à lui peut être considéré comme galiléen. C'est dans un tel référentiel que nous étudions le mouvement du satellite.



La force de gravitation subie par le mobile est perpendiculai-

re à la trajectoire. Or c'est la seule force qui s'exerce sur lui. Son accélération est donc aussi normale à la trajectoire, ce qui indique que le mouvement est uniforme. Son accélération vaut ainsi:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Appliquons au mobile l'équation de Newton.

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{ou} \qquad F = ma.$$

$\vec{F}$ est la force de gravitation et a pour grandeur:

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

On en déduit: $$\frac{GMm}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r}.$$

La vitesse du satellite est donc:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Plus l'orbite est grande (r grand), plus la vitesse est petite.

Utilisons la relation $s = vt$, valable pour les mouvements uniformes, en l'appliquant à une révolution complète. L'espace parcouru est $2\pi r$. Le temps de parcours est la période de révolution T. Elle vaut:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

ou $$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

On remarque que la masse du satellite n'a aucune influence sur sa vitesse et sur sa période de révolution.

Les résultats ci-dessus s'appliquent, par exemple, aux planètes tournant autour du soleil, à la lune dans son mouvement autour de la terre, ou aux satellites artificiels. Ils sont valables dans la mesure où les orbites sont circulaires, et si la masse de l'astre est beaucoup plus grande que celle du satellite. Au paragraphe 126 nous étudierons le cas où le satellite et l'astre ont des masses quelconques.

§ 75* Mouvement képlérien

Lorsqu'elles sont observées depuis la terre, les planètes présentent des trajectoires très compliquées. Cela se comprend aisément puisque la terre, comme les autres planètes, tourne autour du soleil. Au seizième siècle, Tycho-Brahé a effectué un grand nombre de mesures relativement à la position des planètes. Au début du dix-septième siècle, Képler a étudié les documents de Tycho-Brahé. Il a trouvé que le mouvement des planètes est régi par trois lois.

Lois de Képler:

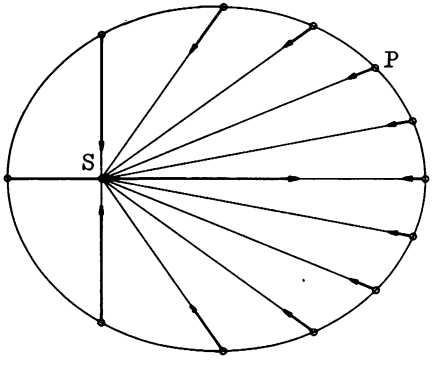
1. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.

2. Le segment qui joint une planète au soleil balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux.

3. Les carrés des temps de révolution des diverses planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

Les planètes et le soleil sont considérés comme des points matériels. Cela peut se faire parce que leurs dimensions sont très petites par rapport aux distances qui les séparent. En fait, les ellipses décrites par les planètes sont assez voisines de cercles.

La seconde loi est appelée loi des aires. Elle est illustrée par le dessin ci-dessous. La planète y est représentée à des instants régulièrement espacés dans le temps. Chaque secteur de l'ellipse a la même aire. Le point de la trajectoire qui est le plus proche du soleil est appelé périhélie, celui qui est le plus éloigné, aphélie. On remarque que la vitesse de la planète est plus grande à son périhélie qu'à son aphélie.



Les deux premières lois de Képler, qui renseignent sur la trajectoire et sur la façon de la parcourir, constituent un horaire général pour les planètes. A partir de cet horaire, on peut calculer leur accélération. On trouve qu'elle est continuellement dirigée vers le soleil et que sa grandeur est inversement proportionnelle au carré de la distance de la planète au soleil. Cette cons-

tatation peut conduire aux postulats fondamentaux de la mécanique. L'accélération des planètes est produite par une force d'attraction qui lui est proportionnelle (d'où $\vec{F} = m\vec{a}$) et cette attraction est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les objets (d'où $F \sim 1/d^2$).

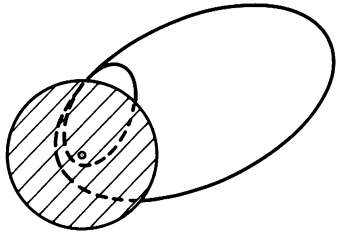
Dans le cas où la trajectoire est circulaire, la relation que nous avons établie au paragraphe précédent pour calculer le temps de révolution est l'expression de la troisième loi de Képler. Cette relation peut s'écrire, en remplaçant r par $\frac{1}{2}d$ (d = diamètre de l'orbite):

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM}$$

$$T^2 = \frac{\pi^2}{2GM} d^3.$$

M désigne la masse de l'astre autour duquel tournent les planètes. Pour elles toutes, $\pi^2/2GM$ est une constante. Le carré des temps de révolution est donc proportionnel au cube des grands axes, qui ici s'identifient aux diamètres.

Il n'y a aucune différence essentielle entre le mouvement d'un objet effectuant un petit trajet en chute libre sur la terre et le mouvement d'un satellite, qui est un mouvement képlérien. Lorsqu'on lance un projectile depuis la terre, et qu'on ne le lance pas assez fort pour qu'il la quitte définitivement, il décrit une ellipse ayant un foyer au centre de la terre. Une portion de cette ellipse est à l'intérieur de la terre et ne peut être décrite par le mobile. La trajectoire se limite donc à un arc d'ellipse. Si les dimensions de la trajectoire sont petites par rapport au rayon terrestre, l'accélération du mobile a la valeur constante $\vec{g}$ et sa trajectoire s'identifie à un arc de parabole ou, dans le cas limite, à un segment de droite (§ 28).



§ 76 Exemples de calcul

Exemple 1: Calculer l'accélération de la pesanteur à la surface d'une petite planète sphérique et homogène, dont la masse volumique vaut 4 kg/dm³ et le rayon 50 km. Quelle est la durée de chute d'un objet qui tombe sur cette planète d'une hauteur de 1 m ?

△△△ Soient ρ la masse volumique et R le rayon. La masse de la planète est

$$M = \rho.V = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

Selon le développement du cours, l'accélération de la pesanteur est

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \cdot \frac{G}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R\rho G.$$

L'horaire d'un objet en chute libre est (origine du temps à l'instant de départ, origine des vecteurs position au point de départ, vitesse initiale nulle):

$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ et par projection: $x = \frac{1}{2}gt^2$.

On en déduit: $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$.

C'est la durée de chute lorsque l'objet tombe d'une hauteur x.

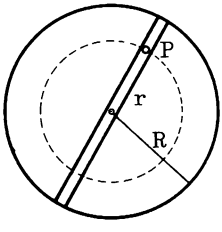
Numériquement, on a:

$$g = \frac{4}{3}\pi.5.10^4\,m.4.10^3\,\frac{kg}{m^3}.6,67.10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} = 5,59.10^{-2}\,\frac{m}{s^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2.1\ m}{5,59.10^{-2}\ ms^{-2}}} = \sqrt{0,358.10^2\ s^2} = 5,98\ s.$$

Exemple 2: On imagine un canal rectiligne suivant un diamètre de la terre. Calculer l'accélération de la pesanteur à une distance r du centre de la terre.

△△△ Désignons par M la masse de la terre et par R son rayon. Par un point P, à une distance r du centre, faisons passer une sphère de rayon r. Cette sphère divise la boule en deux parties: une boule pleine emboîtée dans une boule creuse. Sur un objet placé en P, la force gravifique est la somme des forces exercées par ces deux parties de la terre. Or à l'intérieur d'une boule creuse, les actions gravifiques sont nulles. L'objet ne subit donc que la gravitation de la boule intérieure. On en déduit que l'accélération de la pesanteur en ce point vaut:



$$g' = \frac{GM'}{r^2}$$

où M' est la masse de la petite boule. La terre étant supposée homogène, les masses des deux boules sont proportionnelles aux cubes de leurs rayons. On a donc:

$$\frac{M'}{M} = \frac{r^3}{R^3} \qquad \text{d'où} \qquad M' = M\,\frac{r^3}{R^3}.$$

L'accélération de la pesanteur à une distance r du centre de la terre vaut donc:

$$g' = \frac{G}{r^2} \cdot M\,\frac{r^3}{R^3} = \frac{GM}{R^3}\,r.$$

On voit qu'elle varie linéairement avec r.

Il y a une suite à ce problème, au paragraphe 120, dans le sujet des mouvements harmoniques.

Exemple 3: Calculer le temps de révolution d'un satellite décrivant le plus petit cercle possible autour de la terre.

△△△ Admettons, ce qui est un cas limite à cause de l'atmosphère, que le rayon de la trajectoire soit pratiquement égal au rayon terrestre. D'après le cours, la période de révolution est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}37^3 \cdot 10^{18}\ m^3}{6{,}67.10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}.5{,}99.10^{24}\ kg}}$$

$$= 2\pi\sqrt{6{,}47.10^5\ s^2} = 2\pi\sqrt{64{,}7.10^4\ s^2} = 2\pi.8{,}04.10^2\ s$$

$$= 5050\ s \cong 1\ h\ 24\ min.$$

Exemple 4: A quelle altitude au-dessus de la terre faut-il placer un satellite sur orbite circulaire pour qu'il apparaisse immobile aux habitants de la terre ? C'est ce qu'on appelle un satellite stationnaire. Préciser le référentiel.

△△△ On choisit une origine au centre de la terre et des axes allant de ce point à des étoiles fixes. Dans ce référentiel, qui est beaucoup mieux galiléen qu'un référentiel lié à la terre, le satellite doit avoir une période T égale à la durée d'une rotation de la terre relativement aux étoiles. T vaut donc un jour sidéral. Selon ce qui a été établi dans le cours, la durée d'une révolution et le rayon de l'orbite sont liés par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \qquad \text{ou} \qquad r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

L'altitude cherchée est donc, si R est le rayon terrestre:

$$h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R.$$

Numériquement, on a: $R = 6{,}37.10^6$ m; $M = 5{,}99.10^{24}$ kg;
$T = 23$ h 56 min 4 s = 86 164 s $\cong 8{,}62.10^4$ s.

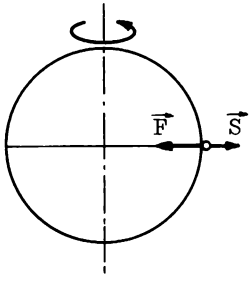
$$\frac{GMT^2}{4\pi^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}.5{,}99.10^{24}\ \text{kg}.8{,}62^2.10^8\ \text{s}^2}{4\pi^2} = 75{,}2.10^{21}\ \text{m}^3.$$

$$h = 4{,}22.10^7\ \text{m} - 0{,}637.10^7\ \text{m} = 3{,}58.10^7\ \text{m} = 35\ 800\ \text{km}.$$

Exemple 5: On suppose que la terre est une sphère parfaite. Soient R son rayon, M sa masse et T sa période de rotation sur elle-même par rapport aux étoiles (jour sidéral).
a) Calculer la force exercée par le sol sur les pieds d'un homme de masse m debout à l'équateur.
b) Faire le même calcul aux pôles.
c) Quel devrait être la période de rotation de la terre pour que la force calculée en (a) soit nulle.

△△△ On travaille de nouveau dans un référentiel galiléen déterminé par le centre de la terre et les directions de trois étoiles fixes.

a) Examinons la situation à l'équateur. L'homme est sollicité par deux forces: une force de gravitation $\vec{F}$ et une force de soutien $\vec{S}$ exercée par le sol. L'équation de Newton s'écrit:



$$\vec{F} + \vec{S} = m\vec{a}.$$

L'accélération de l'homme est dirigée vers le centre de la terre (mouvement circulaire uniforme). Par projection des vecteurs sur un axe parallèle à l'accélération et de même sens, on obtient:

$$F - S = ma.$$

De plus:
$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

et
$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2R^2}{T^2R} = \frac{4\pi^2R}{T^2}.$$

La force exercée par le sol sur l'homme vaut donc:

$$S = F - ma = \frac{GMm}{R^2} - \frac{4\pi^2 Rm}{T^2}.$$

b) Au pôle, l'accélération de l'homme est nulle, de sorte que

$$S = \frac{GMm}{R^2}.$$

c) A l'équateur, la force de soutien serait nulle si l'on avait

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2}.$$

Cela arriverait si la période de rotation de la terre satisfaisait à l'équation ci-dessus, c'est-à-dire valait

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Tous les objets placés à l'équateur seraient "satellisés".

Le calcul numérique montre que cela correspond à une période de révolution 17 fois plus petite que celle qui existe en fait.

Chapitre 13

FORCES D'INERTIE

§ 77* Référentiels non galiléens

Les lois de la mécanique, et en particulier l'équation fondamentale de la dynamique, sont valables lorsque les mouvements sont étudiés dans un référentiel galiléen (§ 31). Rappelons que pour tous les observateurs d'inertie, l'accélération d'un point matériel donné est la même. De l'équation de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

et de la constance de la masse, il résulte que les forces s'exerçant sur un point matériel sont aussi les mêmes pour tous les observateurs d'inertie. Nous appellerons forces réelles les forces qui apparaissent à ces observateurs-là.

Il y a toutefois des situations où il est tout naturel de lier un référentiel à un corps qui est accéléré par rapport aux référentiels d'inertie. Il s'agit alors de savoir comment modifier les lois de la mécanique pour qu'elles rendent compte des mouvements observés depuis ces référentiels qui ne sont pas galiléens. L'étude de ce problème montre qu'il suffit d'introduire, en plus des forces réelles qui s'exercent sur les mobiles, des forces fictives qu'on appelle forces d'inertie. Dans un référentiel non galiléen, l'équation fondamentale de la dynamique est valable si on l'écrit:

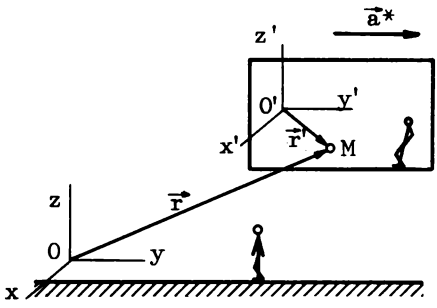
$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = m\vec{a},$$

où $\vec{F}$ représente la somme des forces réelles qui s'exercent sur le mobile et $\vec{F}_{in}$ la somme des forces d'inertie.

Les forces d'inertie dépendent des mouvements du référentiel relativement aux référentiels d'inertie, notamment de l'accélération de son origine et de la rotation de ses axes. L'étude complète de ce sujet dépasse le cadre de ce cours. Nous nous contenterons d'examiner quelques cas particuliers.

§ 78* Référentiel en translation uniformément accélérée

Admettons qu'un référentiel Oxyz lié à la terre puisse être considéré comme galiléen, ce qui est vrai en première approximation. Considérons un véhicule en translation uniformément accélérée par rapport à la terre, et attachons-lui un référentiel O'x'y'z'. Relativement au premier référentiel, les axes du second ont des directions fixes et son origine a un mouvement uniformément accéléré. Les vecteurs position $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ d'un point matériel quelconque M sont liés par la relation



$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'.$$

En dérivant deux fois de suite, on fait apparaître les vitesses et les accélérations du mobile, relativement aux deux référentiels:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}'. \qquad (1)$$

$\vec{v}^*$ représente la vitesse de O' et $\vec{a}^*$ son accélération, vues depuis Oxyz. Supposons que le mobile subisse une force réelle $\vec{F}$. L'observateur d'inertie écrit l'équation de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Compte tenu de (1), on peut écrire cette équation

$$\vec{F} = m(\vec{a}^* + \vec{a}')$$

ou

$$\vec{F} - m\vec{a}^* = m\vec{a}'. \qquad (2)$$

L'observateur dans le véhicule accéléré interprète $-m\vec{a}^*$ comme une force d'inertie

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}^*$$

et il écrit l'équation de Newton:

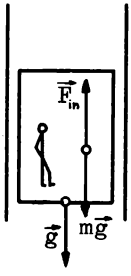
$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = m\vec{a}',$$

qui est équivalente à l'équation (2).

Ainsi, dans un référentiel en translation relativement aux référentiels galiléens, et ayant une accélération $\vec{a}^*$ relativement à eux, il faut introduire, sur tout objet de masse m, une force d'inertie $-m\vec{a}^*$.

Examinons de plus près quelques exemples.

1. Ascenseur en chute libre



On a ici $\vec{a}^* = \vec{g}$. Pour un observateur dans l'ascenseur, tout objet de masse m qui est aussi en chute libre, subit une force de gravitation $m\vec{g}$ et une force d'inertie

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{g}.$$

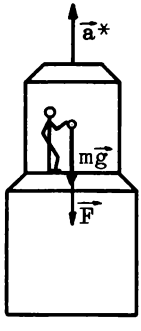
La résultante de ces deux forces est nulle,

$$m\vec{g} + \vec{F}_{in} = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0},$$

de sorte que l'accélération apparente est nulle aussi. Cet observateur voit donc l'objet en mouvement rectiligne uniforme, ou éventuellement immobile. On peut décrire cette situation, communément appelée: état d'apesanteur, en disant que le véhicule ayant l'accélération voulue par le champ de gravitation, la force d'inertie "efface" ce champ.

Un vaisseau spatial tournant autour de la terre sans moteur est dans une situation analogue à cet ascenseur.

2. Fusée



Considérons une fusée quittant la surface de la terre avec une accélération $\vec{a}^*$. On peut exprimer cette accélération avec l'unité $\vec{g}$:

$$\vec{a}^* = -n\vec{g},$$

où n est un nombre pur. Pour un observateur dans la fusée, tout objet de masse m subit, outre son poids $m\vec{g}$, une force d'inertie

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}^* = mn\vec{g}.$$

La somme de ces deux forces constitue le poids apparent de l'objet, relativement au référentiel non galiléen.

$$\vec{P}_a = m\vec{g} + mn\vec{g} = m(n + 1)\vec{g}.$$

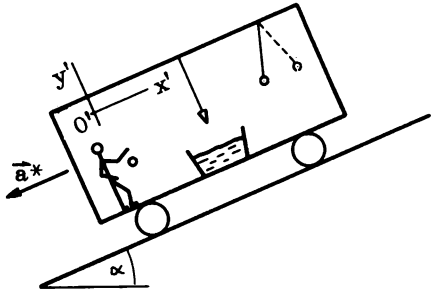
Ce poids apparent est dû à une accélération terrestre apparente

$$\vec{g}_a = (n + 1)\vec{g}.$$

Pour l'observateur situé dans la fusée, tous les phénomènes qui font intervenir l'accélération de la pesanteur sont conditionnés par $\vec{g}_a$, et non par $\vec{g}$. Si $\vec{g}_a$ est nettement plus grand que $\vec{g}$, il se sent très lourd, et sa constitution biologique peut en souffrir gravement.

Si la fusée interrompt ses moteurs, il suffit de poser n = -1. On retombe sur l'exemple précédent.

3. Wagon fou



Supposons qu'un wagon de chemin de fer descende, sans subir de frottement, une rampe rectiligne d'inclinaison α. Un référentiel lié au wagon subit, par rapport à la terre, une accélération $\vec{a}^*$, parallèle à la rampe et ayant pour grandeur (§ 43):

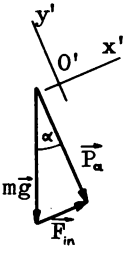
$$a^* = g \sin\alpha.$$

Pour un observateur situé dans le wagon, et qui travaille avec ce référentiel, tout objet de masse m subit, outre son poids $m\vec{g}$, une force d'inertie

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}^* \qquad \text{dont la grandeur est } F_{in} = mg \sin\alpha.$$

Le poids apparent vaut

$$\vec{P}_a = m\vec{g} + \vec{F}_{in}.$$



La composante de $\vec{P}_a$ suivant O'x' vaut

$$(\vec{P}_a)_{x'} = -mg \sin\alpha + F_{in} = -mg \sin\alpha + mg \sin\alpha = 0.$$

Le poids apparent est donc perpendiculaire à la pente. Sa grandeur est

$$P_a = mg \cos\alpha.$$

En d'autres termes, pour l'observateur dans le wagon, l'accé-

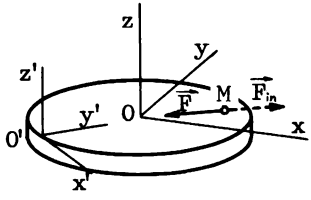
lération de la pesanteur paraît perpendiculaire au plancher et semble avoir une grandeur

$$g_a = g \cos\alpha.$$

Il observera, par exemple, que la surface d'un liquide est parallèle au plancher, qu'un fil à plomb lui est perpendiculaire, qu'un pendule oscille plus lentement et qu'un objet lâché met plus de temps pour arriver au sol.

§ 79* Référentiel en rotation uniforme

Soit un référentiel galiléen Oxyz. Supposons qu'un système (plateau, cage, objet quelconque) tourne autour de l'un des axes, Oz par exemple, à une vitesse angulaire constante ω. Lions au système tournant un référentiel O'x'y'z'. Nous allons étudier les forces qui s'exercent sur un objet M, immobile par rapport au système tournant. Désignons par R la distance de l'objet à l'axe de rotation, et par m sa masse.



Pour un observateur travaillant avec le référentiel Oxyz, M a un mouvement circulaire uniforme. Sa vitesse vaut (§ 23):

$$v = \omega R.$$

Son accélération est dirigée vers le centre du cercle qu'il décrit et a pour grandeur

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

D'après l'équation de Newton, la force qui s'exerce sur l'objet (ou la résultante des forces) est aussi dirigée vers ce centre. C'est la force centripète. Sa grandeur est

$$F = m\omega^2 R.$$

Il s'agit d'une force réelle. Si l'objet est placé sur un plateau tournant, $\vec{F}$ est la force de frottement exercée par le plateau. Si l'objet est attaché à un fil, $\vec{F}$ est la force exercée par le fil, etc.

Pour un observateur lié au système tournant, et travaillant avec le référentiel non galiléen O'x'y'z', l'objet M est im-

mobile. Son accélération est nulle, et la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle. Pour cet observateur, une force d'inertie $\vec{F}_{in}$ doit exister pour compenser la force réelle $\vec{F}$. Il écrira:

$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = \vec{0}.$$

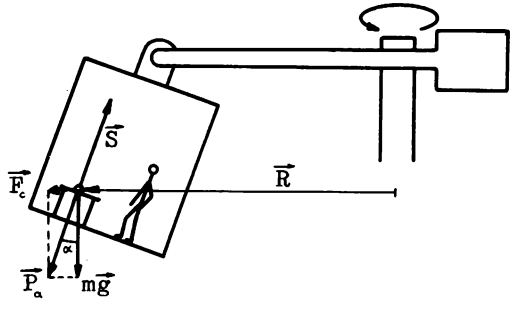
Cette force d'inertie, qui est l'opposé de la force centripète, est appelée <u>force centrifuge</u>. Elle est perpendiculaire à l'axe de rotation et est orientée de façon à le "fuir", d'où son nom. Sa grandeur est

$$\boxed{F_c = m\omega^2 R.}$$

Remarquons que la force d'inertie n'est pas la même en tout point du référentiel, contrairement à ce qu'on avait au paragraphe précédent. Elle dépend de la distance de l'objet à l'axe de rotation. Soulignons que nous n'avons pas fait une étude dynamique complète du mouvement d'un point matériel dans un référentiel en rotation, mais nous sommes limités au cas de la statique dans un tel référentiel.

Voyons quelques exemples de force centrifuge.

1. <u>Centrifugeuses</u>



Dans un laboratoire en rotation autour d'un axe vertical, les objets sont constamment soumis à la force centrifuge, en même temps qu'à leur poids. Il en résulte un poids apparent

$$\vec{P}_a = m\vec{g} + m\omega^2\vec{R}.$$

Celui-ci peut être attribué à une accélération de la pesanteur apparente

$$\vec{g}_a = \vec{g} + \omega^2\vec{R},$$

dont la grandeur est

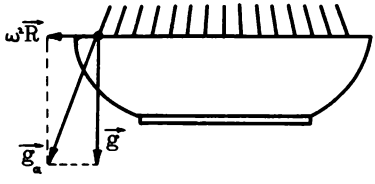
$$g_a = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2},$$

et dont l'angle avec la verticale est déterminé par la relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Les installations de ce genre, qu'on appelle centrifugeuses, existent en divers formats. Certaines sont assez grandes pour que des hommes puissent y trouver place et expérimenter comme s'ils étaient dans une région où $\vec{g}$ est plus grand. D'autres, beaucoup plus petites, sont destinées à rendre plus rapides des processus de décantation dans des liquides (centrifugeuses pour séparer la crème du lait). Dans ces cas là, ω étant très élevé, le poids est négligeable devant la force centrifuge, de sorte que $\vec{g}_a$ vaut pratiquement $\omega^2\vec{R}$. On a ainsi la possibilité de soumettre des corps à ce qui est équivalent à des champs de gravitation très intenses.

2. Croissance des plantes

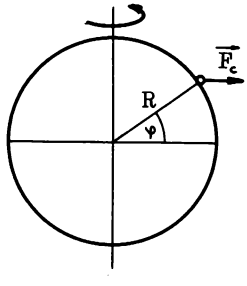


Si on fait pousser de petites plantes dans une terrine en rotation autour d'un axe vertical, elles se comportent comme des observateurs liés au système tournant. Comme ci-dessus, l'accélération de la pesanteur apparente est

$$\vec{g}_a = \vec{g} + \omega^2\vec{R}.$$

Les plantes qui, pour des raisons biologiques, poussent suivant la verticale, se mettent à pousser obliquement, selon la direction de $\vec{g}_a$.

3. Rotation de la terre

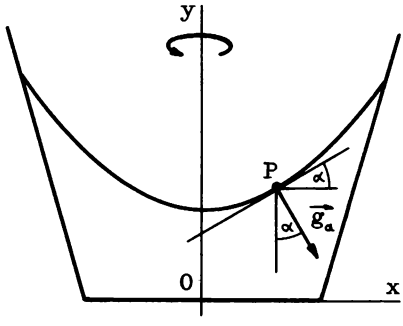


Soit O le centre de la terre et Ox, Oy, Oz trois axes joignant O à des étoiles fixes. Le référentiel Oxyz est galiléen, avec une très bonne approximation. Un référentiel Ox'y'z' lié à la terre (tournant donc avec elle) constitue une bien moins bonne approximation de référentiel galiléen, à cause des accélérations dues à la rotation diurne. Toutefois on peut travailler dans ce référentiel non galiléen en introduisant une force centrifuge. Sur un objet de masse m situé à une latitude φ, elle vaut

$$F_c = m\omega^2 R \cos\varphi,$$

puisque la distance de l'objet à l'axe de rotation est R cosφ, R étant le rayon terrestre. Cette force d'inertie s'ajoute à la force de gravitation. Cela explique pourquoi l'accélération de la pesanteur qui apparaît lorsqu'on fait des mesures sur la terre n'est pas exactement celle qu'on aurait s'il n'y avait que les forces de gravitation. A cause de la force centrifuge, le $\vec{g}$ apparent est fonction de la lattitude. Il est vrai qu'il varie aussi parce que la terre n'est pas une sphère parfaite et homogène.

4. Liquide en rotation



Quelle est la forme de la surface libre d'un liquide dans un récipient en rotation autour d'un axe vertical ? Plaçons des axes Ox et Oy comme l'indique la figure. En un point P d'abscisse x, la verticale apparente fait avec la verticale un angle α tel que

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

La surface du liquide est normale à la verticale apparente. Elle fait donc un angle α avec l'horizontale. Dans le plan Oxy, la trace de la surface libre a pour équation une fonction $y = f(x)$ satisfaisant à la condition

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x,$$

puisque la dérivée dy/dx s'identifie à la tangente de l'angle α. La fonction cherchée est

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C,$$

où C est une constante arbitraire. C'est l'équation d'une parabole. On en conclut que la surface libre est un paraboloïde de révolution, d'axe vertical.

Remarque finale

Dans tous les exemples traités ci-dessus, on considère des objets immobiles par rapport au référentiel en rotation. La seule force d'inertie à introduire est alors la force centrifuge. Si on étudie des objets en mouvement par rapport à ce

référentiel, il faut introduire une force d'inertie supplémentaire appelée <u>force de Coriolis</u>. Cette force est proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$ du mobile par rapport au référentiel en rotation. On montre qu'elle vaut:

$$\vec{F} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

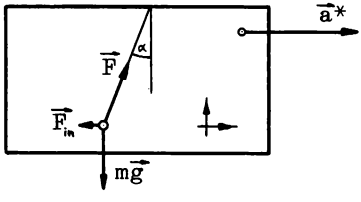
Une conséquence de la force de Coriolis est qu'un mobile en chute libre dans une centrifugeuse ne se déplace pas suivant la verticale apparente (la direction de $\vec{g}$ apparent).

Dans un référentiel lié à la terre, on doit aussi introduire, outre la force centrifuge, une force de Coriolis. Elle joue un rôle non négligeable dans les problèmes d'artillerie, parce que les vitesses des mobiles sont grandes.

§ 80* <u>Exemples de calcul</u>

<u>Exemple 1*:</u> Déterminer la direction d'un fil à plomb dans un bus qui subit une accélération de 1 m/s² sur une route droite et horizontale.

△△△ Dans un référentiel lié au véhicule, l'objet suspendu au fil est en équilibre sous l'influence de trois forces: son poids, la force d'inertie et la traction du fil. On peut donc écrire:



$$m\vec{g} + \vec{F}_{in} + \vec{F} = \vec{0}.$$

Par projection sur des axes, on en déduit:

$$-F_{in} + F \sin\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad -mg + F\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{in}}{mg}.$$

De la relation $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}^*$, on déduit pour les normes des vecteurs:

$$F_{in} = ma^*.$$

On a alors:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^*}{g}.$$

L'angle fait par le fil avec la verticale vaut donc

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{a^*}{g} = \text{arc tg}\ 0{,}1 = 5{,}7^\circ.$$

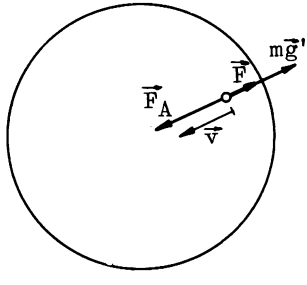
Cet exemple met en évidence le principe de l'accéléromètre.

Exemple 2*: Des gouttelettes d'huile, de rayon R, en suspension dans de l'eau, sont placées dans une centrifugeuse tournant à raison de 6000 tours par minute. On suppose qu'elles sont à 10 cm de l'axe de rotation. Quel doit être leur rayon pour que leur vitesse limite soit de 1 mm/s ? (Nous choisissons une vitesse très faible parce que, dans notre étude, nous nous sommes limités aux objets immobiles dans le référentiel en rotation.)

△△△ Dans un référentiel lié au système tournant, l'accélération de la pesanteur est négligeable devant l'accélération centrifuge, vu la grande vitesse angulaire. Le poids apparent de la goutte et la force d'Archimède apparente font donc intervenir un nouveau g valant:

$$g' = \omega^2 d,$$

où ω est la vitesse angulaire et d la distance de la goutte à l'axe de rotation. La masse volumique de l'eau dépassant celle de l'huile, la force d'Archimède apparente est plus grande que le poids apparent. La particule se déplace en sens inverse du champ d'accélération, et se dirige vers l'axe. La force de frottement $\vec{F}$ est en sens inverse. La goutte étant à peu près immobile (dans le référentiel envisagé) la somme des forces qui s'exercent sur elle peut être considérée comme nulle.



$$m\vec{g}' + \vec{F}_A + \vec{F} = \vec{0}.$$

Par projection, on obtient:

$$mg' - F_A + F = 0.$$

L'écoulement est laminaire. On a:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h g' - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g' + 6\pi R \eta_e v = 0$$

$$2R^2 (\rho_e - \rho_h) . g' = 9 \eta_e v$$

$$R = \sqrt{\frac{9 \eta_e v}{2(\rho_e - \rho_h) . \omega^2 d}}.$$

La vitesse angulaire est l'angle décrit par unité de temps.

Numériquement, elle vaut: $\omega = 2\pi.100\ s^{-1}$.

Le rayon des gouttes doit donc valoir:

$$R = \sqrt{\frac{9.10^{-3}\ kgm^{-1}s^{-1}.10^{-3}\ ms^{-1}}{2(1 - 0,92).10^{3}\ kgm^{-3}.4\pi^{2}.10^{4}\ s^{-2}.10^{-1}\ m}} = 1,19.10^{-6}\ m \cong 1,2\ \mu.$$

A

Chapitre 14

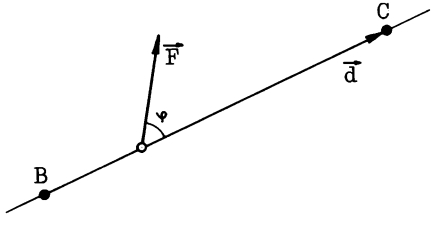
TRAVAIL

§ 81 Définition du travail

Soit un point matériel en mouvement sous l'influence d'un ensemble de forces. Portons notre attention sur l'une des forces qui s'exercent sur le mobile et sur une portion bien déterminée de la trajectoire. A cette force et à ce chemin, on peut attacher une grandeur physique appelée travail de cette force sur ce chemin.

a) Cas particulier: Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne.

Considérons un mobile décrivant une trajectoire rectiligne d'un point B à un point C. Le déplacement peut se représenter par un vecteur $\vec{d}$ (ou $\overrightarrow{BC}$). Soit $\vec{F}$ une force constante s'exerçant sur ce mobile. Le travail de $\vec{F}$ sur le chemin BC est, par définition, le produit scalaire de la force par le déplacement. En désignant le travail par le symbole A (de l'allemand: Arbeit), on a:



$$A = \vec{F}.\vec{d}.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes et du cosinus de leur angle. Si la force fait avec le déplacement un angle φ, le travail vaut donc:

$$A = F.d.\cos\varphi.$$

Il résulte de la définition que

- si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail

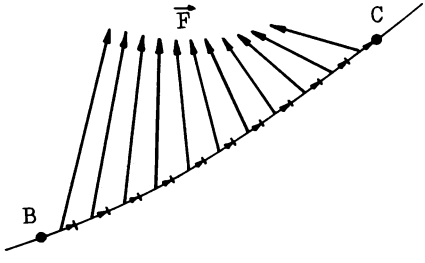
qu'elle fournit est nul,

- si la force est parallèle au déplacement et de même sens, son travail vaut: A = Fd,

- si la force est parallèle au déplacement et de sens contraire, son travail vaut: A = - Fd.

b) Cas général: Travail d'une force quelconque sur un chemin quelconque.

Considérons un mobile décrivant une trajectoire quelconque BC et subissant une force $\vec{F}$ qui peut varier le long de ce chemin. Décomposons la courbe BC en petits tronçons. Faisons cette décomposition de façon que chaque tronçon soit suffisamment petit pour qu'il puisse être considéré comme rectiligne et que la force $\vec{F}$ soit, sur lui, pratiquement constante. On peut alors calculer le travail de la force $\vec{F}$ sur chaque tronçon, à l'aide de la définition précédente. Désignons les petits déplacements par $\overrightarrow{\Delta r_1}$, $\overrightarrow{\Delta r_2}$, ..., $\overrightarrow{\Delta r_n}$ et la valeur de la force sur ces tronçons par $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, respectivement. Les travaux sur ces éléments de chemin sont appelés travaux élémentaires et valent:



$$\Delta A_i = \vec{F}_i . \overrightarrow{\Delta r_i} . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Le travail de $\vec{F}$ sur le chemin BC est, par définition, la somme des travaux élémentaires effectués par $\vec{F}$, sur les différents tronçons de ce chemin.

$$\boxed{A = \sum \vec{F}_i . \overrightarrow{\Delta r_i} .}$$

Cette relation ne définit pas le travail d'une façon rigoureuse. Pour une meilleure définition, il faut faire tendre tous les $\overrightarrow{\Delta r_i}$ vers zéro - leur nombre tend alors vers infini - et envisager la limite de la somme des travaux élémentaires. Cette limite, si elle existe, est le travail. On exprime cela en disant que le travail d'une force sur un chemin est l'intégrale curviligne de cette force le long de ce chemin. On écrit alors:

$$A = \int \vec{F}.\vec{dr}.$$

Le travail est le produit d'une force par une longueur. Dans le système international, l'unité de travail est le joule (abréviation: J), produit du newton et du mètre.

$$1\ J = 1\ N.1\ m.$$

En exprimant le newton à l'aide des unités fondamentales, on voit que:

$$1\ J = 1\ \frac{kg.m^2}{s^2}.$$

On utilise parfois une ancienne unité de travail, le kilogrammètre, égale au produit d'un kilogramme-force (ou kilopond) par un mètre.

$$1 \text{ kilogrammètre} = 1 \text{ kp}.1 \text{ m} = 9{,}81 \text{ N}.1 \text{ m} = 9{,}81 \text{ J}.$$

L'abréviation officielle kgm est à éviter, parce qu'elle désigne autre chose, le produit d'un kg par un m.

§ 82 Propriétés du travail

1. Le signe d'un produit scalaire est fixé par la valeur du cosinus de l'angle des deux vecteurs. On peut en déduire la règle suivante relativement à la valeur du travail élémentaire.

> Propriété 1: Lorsque l'angle formé par la force avec le chemin est aigu ou nul, le travail est positif. Lorsque cet angle est droit, le travail est nul. Lorsque cet angle est obtus ou plat, le travail est négatif.

Cela signifie qu'une force effectue un travail positif lorsqu'elle aide au mouvement, un travail négatif lorsqu'elle entrave le mouvement.

2. Considérons un mobile sollicité par deux forces $\vec{G}$ et $\vec{H}$, dont la résultante est $\vec{F}$. Sur un certain chemin parcouru par ce mobile, nous allons envisager le travail effectué par chacune de ces forces. Ces travaux seront désignés par $A(\vec{G})$, $A(\vec{H})$ et $A(\vec{F})$, respectivement. Partageons le chemin en petits tronçons $\Delta\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), et désignons par $\vec{G}_i$, $\vec{H}_i$ et $\vec{F}_i$ la

valeur des différentes forces sur le i-ème tronçon. On a évidemment:

$$\vec{F}_i = \vec{G}_i + \vec{H}_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

On peut alors écrire:

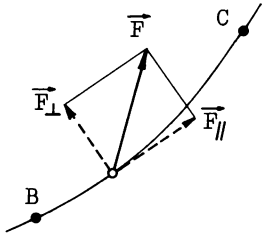
$$A(\vec{F}) = \sum \vec{F}_i.\overrightarrow{\Delta r}_i = \sum(\vec{G}_i + \vec{H}_i).\overrightarrow{\Delta r}_i = \sum(\vec{G}_i.\overrightarrow{\Delta r}_i + \vec{H}_i.\overrightarrow{\Delta r}_i) =$$

$$= \sum \vec{G}_i.\overrightarrow{\Delta r}_i + \sum \vec{H}_i.\overrightarrow{\Delta r}_i = A(\vec{G}) + A(\vec{H}).$$

Un calcul analogue peut être fait avec la résultante de trois forces, ou davantage. On en conclut:

> Propriété 2: Le travail de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme des travaux de ces forces.

3. Soit un mobile sollicité par une force $\vec{F}$ et se déplaçant. On peut, en chaque point, remplacer la force $\vec{F}$ par ses composantes tangentielle et perpendiculaire à la trajectoire. En vertu de la propriété 2, on peut écrire:



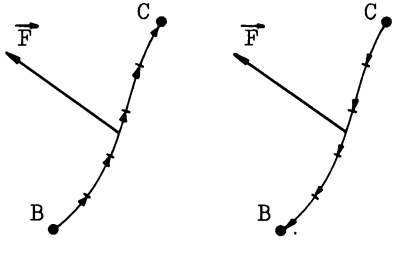
$$A(\vec{F}) = A(\vec{F}_{//}) + A(\vec{F}_{\perp}).$$

Or $A(\vec{F}_{\perp})$ est nul. Il en résulte:

$$A(\vec{F}) = A(\vec{F}_{//}).$$

Propriété 3: Le travail d'une force est égal au travail de sa composante tangentielle au chemin.

4. Considérons maintenant un mobile effectuant un certain trajet dans un sens, puis en sens inverse. Supposons qu'une force $\vec{F}$, s'exerçant sur le mobile, ait en chaque point la même valeur à l'aller qu'au retour. Le travail de $\vec{F}$ sur le trajet d'aller est:



$$A_{BC} = \sum \vec{F}_i.\overrightarrow{\Delta r}_i.$$

Le travail de $\vec{F}$ sur le trajet de retour est:

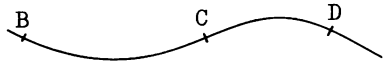
$$A_{CB} = \sum \vec{F}_i . \vec{\Delta r}'_i$$

où les $\vec{\Delta r}'_i$ sont les vecteurs opposés aux $\vec{\Delta r}_i$. Il en résulte:

$$A_{CB} = \sum \vec{F}_i . \vec{\Delta r}'_i = \sum \vec{F}_i . (-\vec{\Delta r}_i) = -\sum \vec{F}_i . \vec{\Delta r}_i = -A_{BC}.$$

Propriété 4: Le travail d'une force sur un chemin et le travail de cette force sur le même chemin parcouru en sens inverse sont opposés.

5. Considérons un mobile parcourant un chemin BCD. On peut envisager le travail d'une force $\vec{F}$ sur les trajets BC et CD. Ces deux travaux sont des sommes de travaux élémentaires $\vec{F}_i . \vec{\Delta r}_i$. La somme de ces sommes est la somme de tous les travaux élémentaires effectués sur le trajet BD. On en conclut:

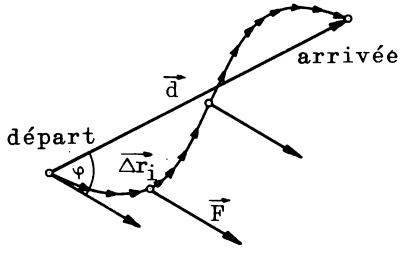


$$A_{BD} = A_{BC} + A_{CD}.$$

Propriété 5: Le travail d'une force sur un chemin est égal à la somme des travaux de cette force sur des tronçons consécutifs constituant ce chemin.

§ 83 Applications

1. Travail d'une force constante



Nous ne supposons rien de particulier concernant le chemin. Sur tous les tronçons $\vec{\Delta r}_i$, le vecteur force est le même. Son travail est donc:

$$A = \sum \vec{F} . \vec{\Delta r}_i = \vec{F} . \sum \vec{\Delta r}_i .$$

Tous les vecteurs $\vec{\Delta r}_i$ étant consécutifs, leur somme est égale au vecteur $\vec{d}$ joignant le point de départ au point d'arrivée. On peut donc écrire:

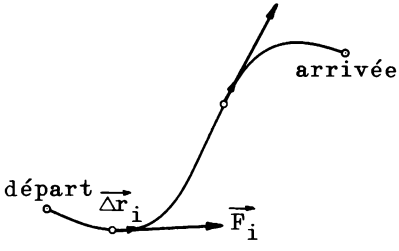
$$A = \vec{F} . \vec{d} \qquad \text{ou} \qquad A = Fd \cos\varphi.$$

Le travail d'une force constante est égal au produit scalaire de la force par le vecteur représentant globalement le dépla-

cement.

Il est indépendant du chemin parcouru entre le point d'arrivée et le point de départ.

2. Travail d'une force de propulsion de grandeur constante



La force est partout parallèle au déplacement, et de même sens. Son travail est

$$A = \sum \overrightarrow{F_i}\overrightarrow{\Delta r_i} = \sum F_i . \left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\| . \cos 0$$

$$= \sum F_i . \left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\| .$$

Les vecteurs $\overrightarrow{F_i}$ sont différents, mais leurs normes F_i sont les mêmes. Désignons par F la norme commune. On a:

$$A = \sum F . \left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\| = F . \sum \left\|\overrightarrow{\Delta r_i}\right\| .$$

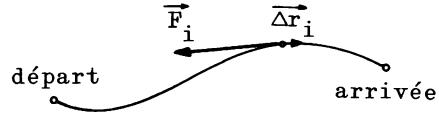
La somme des grandeurs des $\overrightarrow{\Delta r_i}$ est la longueur totale du chemin. Nous la désignons par L. Ainsi:

$$A = F.L$$

Le travail d'une force de propulsion de grandeur constante est égal au produit de la grandeur de la force par la longueur du chemin.

Contrairement aux apparences, ce résultat est très différent de celui qui a été établi au numéro 1.

3. Travail d'une force de frottement de grandeur constante

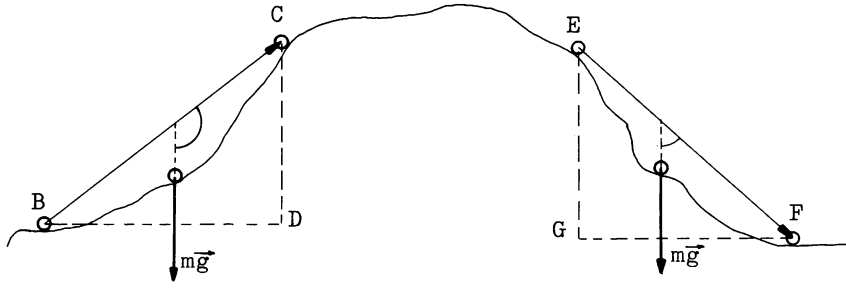


C'est la situation du numéro 2, dans laquelle l'angle nul entre la force et le déplacement est remplacé par un angle plat. Le cosinus de zéro, qui vaut 1, est remplacé par celui de π, qui vaut -1, de sorte qu'on a un changement de signe dans le résultat final.

$$A = - FL.$$

Ici encore, le travail est proportionnel à la longueur du chemin.

4. Travail de la pesanteur



Nous envisageons le cas d'un corps qui monte (trajet BC) et celui d'un corps qui descend (trajet EF). Le poids étant une force constante, nous pouvons calculer son travail à l'aide du résultat du numéro 1.

$$\begin{aligned} A_{BC} &= \vec{mg}.\vec{BC} \\ &= \vec{mg}.(\vec{BD} + \vec{DC}) \\ &= \vec{mg}.\vec{BD} + \vec{mg}.\vec{DC} \\ &= 0 + \vec{mg}.\vec{DC} \\ &= -mg.DC \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_{EF} &= \vec{mg}.\vec{EF} \\ &= \vec{mg}.(\vec{EG} + \vec{GF}) \\ &= \vec{mg}.\vec{EG} + \vec{mg}.\vec{GF} \\ &= \vec{mg}.\vec{EG} + 0 \\ &= mg.EG \end{aligned}$$

En désignant par h (nombre positif) la dénivellation du trajet, on obtient:

$$A_{BC} = -mgh \qquad \text{et} \qquad A_{EF} = mgh.$$

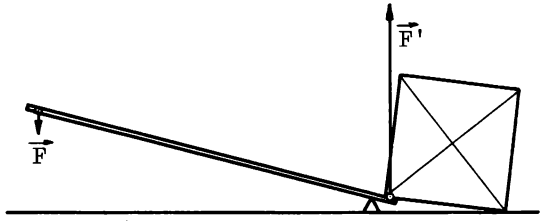
Le travail de la pesanteur s'exprime donc par le produit mgh, muni du signe - si l'objet monte, du signe + si l'objet descend. On a une confirmation de ces signes si on constate que la force et le déplacement font un angle obtus dans un cas, un angle aigu dans l'autre.

§ 84* Conservation du travail

Les diverses activités humaines, depuis des temps très reculés, ont mis en évidence la nécessité de construire des machines qui transforment les forces. Si la force qu'il faut exercer pour accomplir une tâche déterminée - soulever un objet très lourd, par exemple - dépasse les possibilités des muscles ou du moteur à disposition, on a besoin de ce qu'on pourrait appeler un transformateur de force. Les plus courants de ces

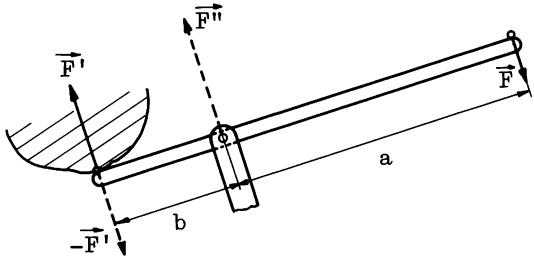
engins sont les leviers, les poulies, les systèmes de poulies, les treuils, les engrenages, les crics et les systèmes hydrauliques. Ils sont connus sous le nom de machines simples. (Ces machines sont en contraste avec des machines plus évoluées, moteurs électriques, moteurs à explosion, machines à vapeur, etc, qui ne sont pas des transformateurs de force, mais d'énergie.)

Supposons qu'un opérateur exerce une force $\vec{F}$ sur une machine simple - un levier, par exemple. Comme conséquence, la machine exerce sur quelque chose - un objet à soulever, par exemple - une force $\vec{F}'$ qui peut être beaucoup plus grande que $\vec{F}$. On peut montrer que dans tous les cas où les frottements sont négligeables, et où les mouvements sont assez lents pour qu'on puisse considérer la machine comme passant par une suite d'états d'équilibre, le travail de $\vec{F}$ est égal au travail de $\vec{F}'$. En d'autres termes, le travail effectué par l'opérateur est égal au travail effectué par la machine. Une machine simple conserve donc le travail.



Ceci se comprend intuitivement lorsque l'on constate que dans tous les cas où la force exercée par la machine est plus grande que la force exercée par l'opérateur, le chemin parcouru est plus petit, et cela selon une proportionnalité inverse. Du point de vue de la force, il y a gain; de celui du déplacement, il y a perte; et de celui du travail, il n'y a ni gain ni perte.

Nous ne pouvons donner ici une démonstration générale de cette loi de conservation du travail. Nous nous bornerons à la vérifier dans le cas d'un levier. Supposons que le levier tourne d'un très petit angle α. Le point d'application de la force $\vec{F}$ subit alors un déplacement qu'on peut considérer comme rectiligne. La direction et le sens de ce déplacement sont identiques à ceux de $\vec{F}$ et sa grandeur vaut αa. (Car: arc = angle.rayon.) Le



travail effectué par l'opérateur vaut donc:

$$A_{opérateur} = F\alpha a.$$

De la même manière, on calcule le travail effectué par le levier:

$$A_{levier} = F'\alpha b.$$

Le levier est en équilibre sous l'influence des trois forces $\vec{F}$, $-\vec{F}'$ et $\vec{F}''$. ($-\vec{F}'$ est la réaction de $\vec{F}'$, et $\vec{F}''$ est la force exercée par l'appui.) D'après la règle des moments, on a

$$Fa = F'b \qquad \text{d'où} \qquad A_{opérateur} = A_{levier}.$$

Le levier conserve donc le travail. Nous avons déjà montré qu'il en est de même de la transmission hydraulique (§ 57).

§ 85 Exemples de calcul

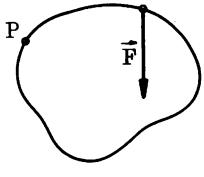
Exemple 1: Calculer le travail fourni par un homme de 60 kg qui s'élève de 300 m.

ΔΔΔ Si l'homme se déplace sans accélération notable, on peut admettre que l'ensemble des forces exercées par les muscles de ses jambes est équivalent à une force unique qui est l'opposé de son poids. Le travail qu'il fournit est alors l'opposé du travail effectué par la pesanteur. Pour s'élever d'une hauteur h, l'homme fournit le travail

$$A = mgh = 60\ kg.10\ \frac{m}{s^2}.300\ m = 1{,}8.10^5\ J.$$

Exemple 2: Calculer le travail d'une force constante sur un parcours fermé.

ΔΔΔ Choisissons un point quelconque P de la courbe. C'est à la fois le point de départ et le point d'arrivée. Dans le cas d'une force constante, le travail est indépendant du chemin. On peut donc remplacer la courbe fermée par le chemin direct de P à P - le vecteur nul! On a donc:



$$App(circuit) = \vec{F}.\vec{0} = 0.$$

Le travail cherché est nul.

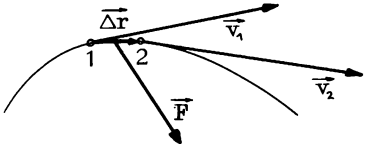
Chapitre 15

ENERGIE

§ 86 Energie cinétique

Considérons un point matériel en mouvement et intéressons-nous au travail effectué par la résultante des forces qui s'exercent sur lui, entre deux points de sa trajectoire.

Envisageons d'abord deux points 1 et 2, suffisamment proches pour que le trajet soit pratiquement rectiligne et pour que la résultante des forces puisse être considérée comme constante. Soit $\overrightarrow{\Delta r}$ le trajet et $\overrightarrow{F}$ la résultante. Le travail de $\overrightarrow{F}$ sur le petit trajet est



$$\Delta A_{12} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\Delta r}.$$

D'après l'équation de Newton, $\overrightarrow{F}$ est égal au produit de la masse du mobile par son accélération.

$$\Delta A_{12} = m\overrightarrow{a}.\overrightarrow{\Delta r}.$$

L'accélération du mobile est égale, à un passage à la limite près, au quotient de l'accroissement de vitesse sur le petit trajet par l'intervalle de temps mis pour le franchir. On a donc:

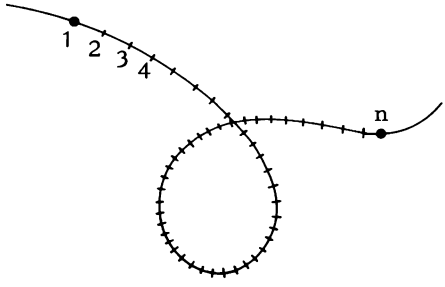
$$\Delta A_{12} = m\,\frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t}\,.\overrightarrow{\Delta r}.$$

Cette expression fait apparaître le quotient $\overrightarrow{\Delta r}/\Delta t$, qui est égal à la vitesse moyenne du mobile sur le petit trajet. Comme la vitesse varie peu sur ce trajet, on peut, sans grande erreur, confondre la vitesse moyenne avec la moyenne des vitesses initiale $\overrightarrow{v_1}$ et finale $\overrightarrow{v_2}$. On peut alors écrire:

$$\Delta A_{12} = m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}).\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}) = \tfrac{1}{2}m\overrightarrow{v_2}^2 - \tfrac{1}{2}m\overrightarrow{v_1}^2,$$

c'est-à-dire: $\Delta A_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. (1)

Etendons ce résultat à une portion quelconque de trajectoire. Tout trajet peut être considéré comme la réunion de trajets élémentaires, suffisamment petits pour qu'on puisse faire sur chacun d'eux le calcul ci-dessus. On a alors:



$$\Delta A_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$\Delta A_{23} = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$\Delta A_{34} = \frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2$$
. . . . . .
$$\Delta A_{n-1,n} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2$$

Additionnons toutes ces égalités membre à membre. A gauche, on trouve la somme des travaux élémentaires effectués par $\vec{F}$. C'est le travail de $\vec{F}$ sur le parcours considéré. A droite, tous les termes sauf deux s'annulent par réduction. On obtient donc:

$$A_{1n} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 . \quad (2)$$

Cette formule exprime pour un parcours quelconque ce que la formule (1) exprime pour un parcours élémentaire.

Nous donnons à la quantité $\frac{1}{2}mv^2$, qui apparaît ici, le nom d'énergie cinétique. Nous la désignerons par E_c.

> <u>Définition:</u> On appelle énergie cinétique d'un point matériel le demi produit de sa masse par le carré de sa vitesse.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Elle se mesure en $kg.m^2.s^{-2}$, c'est-à-dire en joules. La formule (2) nous permet d'énoncer le résultat suivant:

> <u>Théorème de variation de l'énergie cinétique:</u> Le travail de la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel, sur une portion de sa trajectoire, est égal à son accroissement d'énergie cinétique.

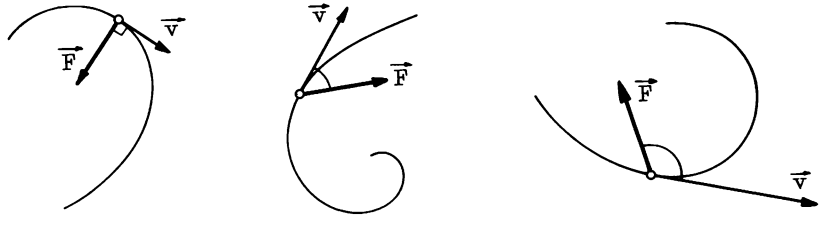
En désignant par 1 et 2 deux points quelconques de la trajectoire, on peut donc écrire:

$$A_{12} = E_c(2) - E_c(1).$$

L'équation de Newton est une loi locale: elle renseigne sur ce qui se passe en un point. Le théorème de variation de l'énergie cinétique est une loi globale: il prend en considération tout un parcours. Ceci mis a part, ces deux lois ont à peu près la même portée. Elles établissent la relation entre les forces qui s'exercent sur un mobile et les variations de sa vitesse.

Soulignons que le théorème établi ici n'impose aucune condition particulière aux forces (en contraste avec le théorème du § 89). Son domaine de validité est aussi large que celui de l'équation de Newton.

Examinons quelques-unes de ses premières conséquences.



1. Si la résultante des forces qui s'exercent sur un mobile est normale à la trajectoire, elle effectue un travail nul. L'énergie cinétique est alors constante. La vitesse change de direction, mais non de grandeur. Exemples: satellite décrivant une trajectoire circulaire, particule chargée dans un champ magnétique.

2. Si la résultante des forces fait un angle aigu ou nul avec la trajectoire (orientée dans le sens du mouvement), elle effectue un travail positif. L'énergie cinétique subit alors un accroissement positif, c'est-à-dire une augmentation. Cela signifie que la vitesse augmente.

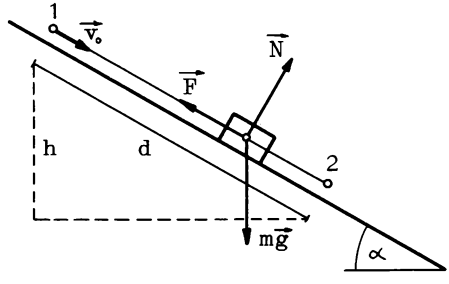
3. Si la résultante des forces fait un angle obtus ou plat avec la trajectoire, elle effectue un travail négatif. Il en résulte alors un accroissement négatif, c'est-à-dire une diminution d'énergie cinétique. Il s'ensuit que la vitesse diminue.

Le calcul du travail des forces est souvent facile. Il en résulte que l'emploi du théorème de variation de l'énergie cinétique permet de résoudre simplement beaucoup de problèmes de dynamique.

§ 87 Applications

a) Distance de freinage d'un objet

Considérons un objet de masse m lancé à une vitesse $\vec{v}_0$ sur un plan d'inclinaison α, parallèlement à une ligne de plus grande pente, vers le bas. Supposons qu'il subisse une force de frottement constante $\vec{F}$, et cherchons à calculer la distance d qu'il franchit avant de s'arrêter.



Utilisons le théorème de variation de l'énergie cinétique sur le parcours considéré. L'objet subit trois forces: son poids $m\vec{g}$, une force de soutien du plan $\vec{N}$ et la force de frottement $\vec{F}$. Le travail de la résultante des forces étant égal à la somme des travaux des forces, on peut écrire:

$$A_{12}(m\vec{g}) + A_{12}(\vec{N}) + A_{12}(\vec{F}) = E_c(2) - E_c(1).$$

Le travail de $m\vec{g}$ vaut mgh (d'après le § 83), ou mgd $\sin\alpha$. Le travail de $\vec{N}$ est nul, puisque cette force est perpendiculaire au chemin. Le travail de $\vec{F}$ vaut -Fd, puisque la force fait avec le déplacement un angle plat. On a donc:

$$mgd \sin\alpha - Fd = 0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

d'où

$$d = \frac{mv_0^2}{2(F - mg \sin\alpha)}.$$

Ce résultat n'a de sens que si d est positif. On doit donc poser la condition de possibilité:

$$F > mg \sin\alpha.$$

Cette condition sur F signifie que le frottement ne doit pas être trop petit. Il est évident que si le frottement est insuffisant, l'objet ne s'arrête jamais et la distance de freinage n'existe pas.

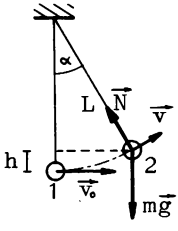
On peut remarquer que la distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse initiale. Si le plan est horizontal, elle vaut

$$d = \frac{mv_o^2}{2F}$$

b) Vitesse d'un pendule

Supposons qu'un pendule, constitué d'un petit objet de masse m suspendu à un fil de longueur L, ait une vitesse $\vec{v_o}$ au point le plus bas de sa trajectoire. Quelle est sa vitesse en un point quelconque ?

Appliquons le théorème de variation de l'énergie cinétique à un parcours allant du point inférieur 1 à un point quelconque 2 dans lequel le fil fait un angle α avec la verticale. Le mobile subit deux forces: son poids $m\vec{g}$ et une force $\vec{N}$ normale à la trajectoire. On a donc:



$$A_{12}(m\vec{g}) + A_{12}(\vec{N}) = E_c(2) - E_c(1)$$

$$-mgh + 0 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_o^2$$

Or $$h = L - L\cos\alpha .$$

Il s'ensuit: $$-mgL(1 - \cos\alpha) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_o^2 .$$

La vitesse cherchée est

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2gL(1 - \cos\alpha)} .$$

Ce résultat n'a de sens que si la quantité sous la racine est positive ou nulle. L'angle α maximal est déterminé par la condition

$$v_o^2 - 2gL(1 - \cos\alpha) = 0$$

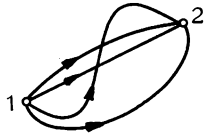
ou $$\cos\alpha = 1 - \frac{v_o^2}{2gL} .$$

(Notons en passant que cette formule fournit la position d'arrêt du mobile pour autant que sa trajectoire soit sur un cercle de rayon L. Cette hypothèse est bien respectée pour les angles α aigus, mais elle ne l'est pas forcément pour des angles obtus, le fil pouvant se détendre.)

§ 88 Energie potentielle

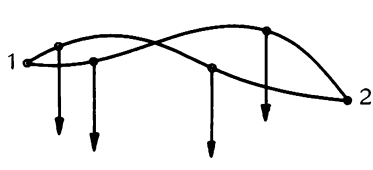
Pour être en mesure d'appliquer le théorème de variation de l'énergie cinétique, il faut pouvoir calculer le travail de chacune des forces qui agissent sur le mobile. Dans bien des cas, ce calcul peut être rendu extrêmement simple, grâce à l'introduction de la notion d'énergie potentielle.

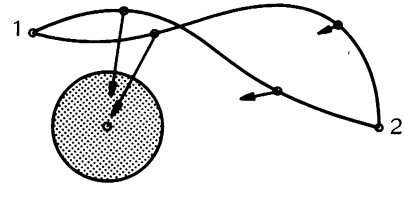
On considère un mobile pouvant se déplacer dans un champ de force. Soient deux points 1 et 2 de ce champ. Pour aller de 1 à 2, le mobile peut suivre différents chemins. Il peut arriver que le travail effectué par le champ soit le même pour tous les chemins liant 1 à 2. S'il en est ainsi quels que soient les points 1 et 2, le champ est dit conservatif.



Définition: Un champ de force est conservatif lorsque les travaux qu'il effectue sont indépendants des chemins.

Nous avons montré au paragraphe 83 que dans tout champ de force uniforme (c'est-à-dire dans lequel la force est partout la même) le travail est indépendant du chemin. Il ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Un champ uniforme, et en particulier le champ de la pesanteur, est donc conservatif. On peut montrer que le champ de gravitation est aussi conservatif.





Il en est de même du champ de force élastique (produit par des ressorts) ou du champ de force produit par une charge électrique sur une autre.

En revanche une force de frottement n'est pas conservative. Si un objet subit une force de frottement de grandeur constante F sur un chemin de longueur L, le travail du frottement est -FL (selon le § 83). Ce travail est proportionnel à la longueur du chemin, et ne saurait par conséquent être indépendant de celui-ci. Pour des raisons analogues, une force propulsive (ou force motrice) provenant d'une action musculaire ou d'un moteur n'est pas conservative.

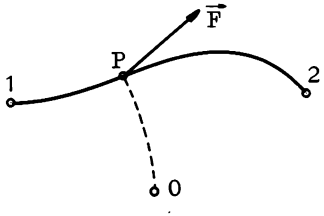
L'énergie potentielle se définit exclusivement pour un mobile situé dans un champ de force conservatif. Dans un tel champ, on choisit arbitrairement un point de référence ou origine O. On considère le travail effectué par le champ lorsque le mobile passe d'un point quelconque P au point O. Comme le champ est conservatif, ce travail est indépendant du chemin que peut suivre le mobile. Le point O étant fixé, ce travail ne dépend plus que du point P. Cette fonction de P est appelée énergie potentielle du mobile en P. On la note E_p.

$$E_p(P) = A_{PO}.$$

Définition: Dans un champ de force conservatif, l'énergie potentielle d'un mobile en un point est le travail effectué par le champ, lorsque le mobile passe de ce point au point de référence.

L'énergie cinétique est liée à la vitesse du mobile. Ici nous avons une énergie liée à la position du mobile dans un champ de force. On pourrait l'appeler énergie "positionnelle". Tout comme le travail et l'énergie cinétique, l'énergie potentielle se mesure en joules.

Remarquons que le déplacement dont il est question dans la définition peut être fictif. Si un mobile passe effectivement d'un point 1 à un point 2 en suivant une certaine trajectoire, on peut considérer l'énergie potentielle en tout point P de celle-ci. C'est le travail qu'effectuerait le champ de force si le mobile passait de P à O, par un chemin quelconque.



Les énergies potentielles aux extrémités de la trajectoire peuvent être mises en relation avec le travail de la force sur cette trajectoire. En effet, les travaux étant indépendants des chemins, on peut écrire sans précautions:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20}$$

d'où

$$A_{12} = E_p(1) - E_p(2).$$

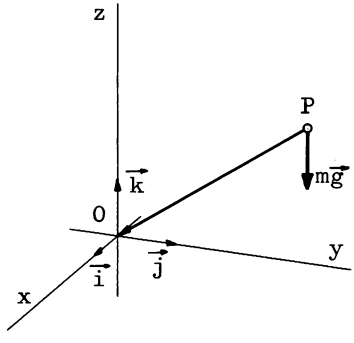
Théorème: Le travail d'une force conservative, sur un parcours quelconque, est égal à la différence d'énergie potentielle entre le point de départ et le point d'arrivée.

Ce théorème permet de calculer le travail d'une force conservative, pourvu que l'on connaisse la fonction énergie potentielle correspondante.

Nous allons maintenant calculer la fonction énergie potentielle, dans quelques champs de force particulièrement importants.

a) Champ de la pesanteur

Par convention, nous appelons champ de la pesanteur une portion suffisamment limitée du champ de gravitation terrestre pour que le poids $m\vec{g}$ d'un corps soit pratiquement le même en tout point. Ce champ de force est conservatif. Choisissons un point O qui serve à la fois d'origine pour un système d'axes orthonormés Oxyz et de point de référence pour l'énergie potentielle. L'axe Oz est vertical et orienté vers le haut. D'après la définition donnée ci-dessus, l'énergie potentielle d'un objet de masse m, situé en un point P de coordonnées (x;y;z) est:

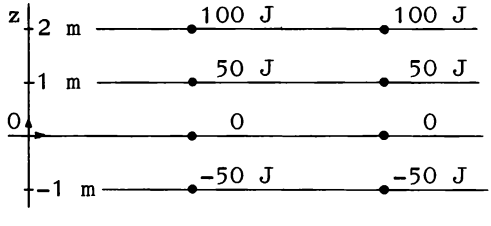


$$E_p(P) = A_{PO} = m\vec{g}.\overrightarrow{PO}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = mgz.$$

$$\boxed{E_p = mgz.}$$

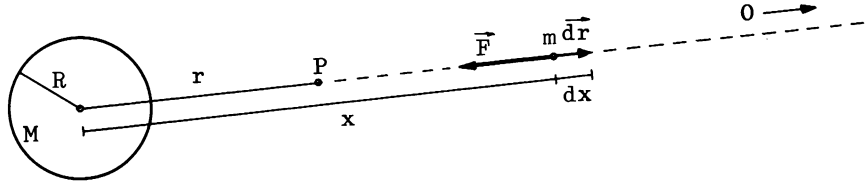
L'énergie potentielle d'un corps dans le champ de la pesanteur est donc proportionnelle à son altitude. La figure ci-contre indique, en divers points de l'espace, les valeurs de E_p pour un corps dont la masse vaut 5 kg (en admettant que $g = 10\ ms^{-2}$).



Les points de même énergie potentielle constituent des surfaces équipotentielles. Dans ce champ de force particulier, ces surfaces sont des plans horizontaux.

b) Champ de gravitation terrestre

Ce champ est aussi conservatif. On peut donc y calculer l'énergie potentielle. Comme point de référence, il est indiqué de choisir un point à l'infini, là où la force de gravitation s'annule.



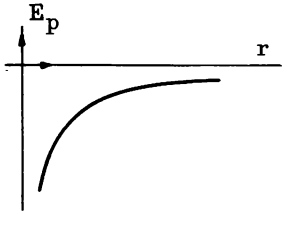
Calculons l'énergie potentielle d'un objet de masse m, situé en un point P, à une distance r du centre de la terre. Soient M la masse de la terre et R son rayon. Le calcul est plus compliqué que dans l'exemple précédent parce que la force de gravitation varie sur le trajet PO. On doit ici utiliser les ressources du calcul intégral. Le mobile subit un déplacement fictif de P à O. Sa distance au centre de la terre, distance désignée par x, varie de r à ∞. La force de gravitation s'exprime par la fonction

$$F = \frac{GMm}{x^2}.$$

L'énergie potentielle en P vaut donc

$$E_p(P) = \int \vec{F}.\vec{dr} = \int_r^\infty -\frac{GMm}{x^2}.dx = \left[\frac{GMm}{x}\right]_r^\infty = -\frac{GMm}{r}.$$

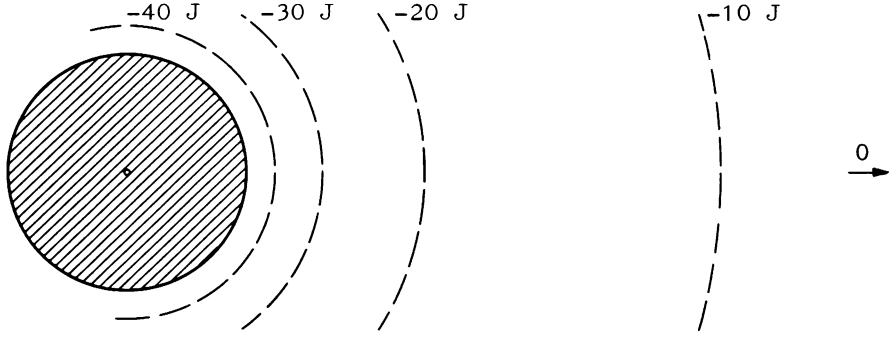
$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}.}$$



Elle est négative en tout point du champ, ce qui se comprend aisément puisque le déplacement de P à O est dans le sens opposé à la force. Comme dans le cas de la pesanteur, elle croît avec l'altitude, mais non plus proportionnellement.

En des points équidistants du centre de la terre, E_p prend la même valeur

puisque r est le même. Les surfaces équipotentielles sont donc ici des sphères centrées sur la terre. La figure ci-dessous indique des valeurs possibles pour l'énergie potentielle en divers points.



Le lecteur pourrait s'étonner de ce que la formule trouvée ici pour le champ de gravitation n'ait rien de commun avec celle qui est relative au champ de la pesanteur, vu que celui-ci est un cas particulier de celui-là. La synthèse des résultats se fait aisément si l'on choisit, pour les deux cas, le point de référence au même endroit, par exemple à la surface de la terre. Pour le champ de gravitation, il suffit de reprendre le calcul ci-dessus en changeant les limites d'intégration.

$$E'_p = \left[\frac{GMm}{x}\right]_r^R = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{r} = GMm\,\frac{r - R}{Rr}.$$

Au voisinage de la terre, r est peu différent de R. On peut confondre rR avec R^2:

$$E'_p \cong m.\frac{GM}{R^2}.(r - R).$$

GM/R^2 n'est autre que l'accélération de la pesanteur et r - R l'altitude. Cette formule s'écrit donc:

$$E'_p \cong mgz,$$

résultat auquel on s'attendait.

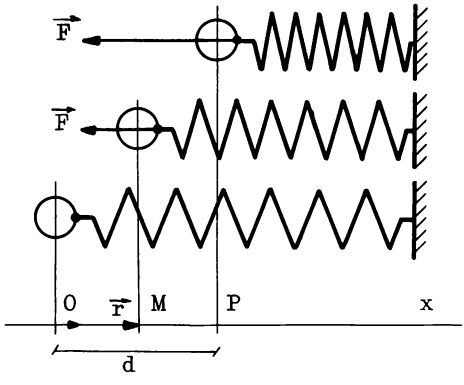
Remarquons que l'expression de l'énergie potentielle dans le champ de gravitation a sa forme la plus simple lorsqu'on place le point de référence à l'infini. C'est la raison pour laquelle on le choisit ordinairement là.

c) Champ de force élastique

La force exercée par un ressort tendu, communément appelée force élastique, est conservative. On peut donc calculer l'énergie potentielle qui lui est associée. Cette force est, du moins pour les ressorts les plus courants, proportionnelle à la déformation. Sa grandeur s'exprime par la relation

$$F = kd,$$

où d est la déformation et k la constante du ressort (§ 40). Calculons l'énergie potentielle d'un objet sollicité par le ressort et se trouvant en un point P où la déformation est d. Comme point de référence O, choisissons le point où se trouve le mobile lorsque le ressort est détendu. L'énergie potentielle cherchée est le travail de la force exercée par le ressort lorsque le mobile passe de P à O. La force n'étant pas constante, le calcul doit se faire par intégration.



Un raisonnement intuitif peut nous faire pressentir le résultat. La force varie linéairement de la valeur kd à la valeur 0. Le travail de cette force pourrait être égal au travail d'une force de grandeur moyenne $\frac{1}{2}kd$ sur ce parcours de longueur d. Comme cette force est parallèle au chemin et de même sens, on aurait

$$A_{PO} = \tfrac{1}{2}kd.d = \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Mais faisons le calcul rigoureusement, par intégration. Plaçons un système d'axes Oxyz, de façon que P soit sur l'axe Ox. Lorsque le mobile est en un point quelconque M défini par le vecteur position $\vec{r}$, il subit une force $\vec{F}$ valant

$$\vec{F} = - k\vec{r}.$$

Cette formule n'est que la transcription vectorielle de la formule des ressorts. Non seulement elle exprime la proportionnalité entre la grandeur de la force et la déformation, mais elle indique la direction et le sens de la force. Le travail de $\vec{F}$ s'exprime par

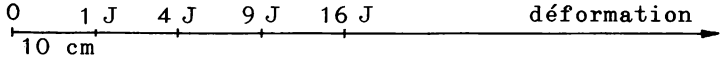
$$\int \vec{F}.\vec{dr} = \int -k\vec{r}.\vec{dr} = \int -k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int -k(xdx + ydy + zdz).$$

Sur le parcours PO, x varie de d à 0. D'autre part, y, z, dy et dz sont nuls. On a alors:

$$E_p(P) = \int_d^0 -kxdx = \left[-\tfrac{1}{2}kx^2 \right]_d^0 = \tfrac{1}{2}kd^2.$$

$$\boxed{E_p = \tfrac{1}{2}kd^2.}$$

L'énergie potentielle d'un mobile dans le champ de force d'un ressort ne dépend que du ressort, - de sa raideur k et de sa déformation d. Pour cette raison, on parle souvent de l'énergie potentielle d'un ressort tendu. La figure ci-dessous indique les énergies potentielles en divers points, si la raideur du ressort vaut 200 N/m.



Remarques finales

1. Si un mobile subit plusieurs forces conservatives $\vec{F}'$, $\vec{F}''$, ..., l'énergie potentielle associée à leur résultante $\vec{F}$ est la somme des énergies potentielles relatives à chaque force. En effet, on a:

$$A_{PO}(\vec{F}) = A_{PO}(\vec{F}') + A_{PO}(\vec{F}'') + \ldots$$

ou

$$E_p = E_p' + E_p'' + \ldots$$

2. Dans beaucoup de situations (objet sur une piste, pendule, etc.) on a des mobiles qui subissent une force partout perpendiculaire à la trajectoire. Les travaux d'une telle force sont toujours nuls, et par conséquent indépendant des chemins. Cette force peut donc être considérée comme conservative. L'énergie potentielle associée est identiquement nulle.

§ 89 Conservation de l'énergie mécanique

Considérons un mobile ne subissant que des forces conservatives. Soit $\vec{F}$ la résultante de celles-ci et E_p l'énergie po-

tentielle associée. Appliquons le théorème de variation de l'énergie cinétique à un tronçon quelconque de la trajectoire.

$$A_{12}(\vec{F}) = E_c(2) - E_c(1).$$

Le premier membre peut s'exprimer en fonction de l'énergie potentielle

$$A_{12}(\vec{F}) = E_p(1) - E_p(2).$$

On obtient donc:

$$E_p(1) - E_p(2) = E_c(2) - E_c(1)$$

ou
$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2). \qquad (1)$$

Ainsi, la somme des énergies cinétique et potentielle est la même en deux points quelconques de la trajectoire. C'est une constante du mouvement. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante:

> Définition: On appelle énergie mécanique d'un point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

La relation (1) nous permet alors d'énoncer:

> Loi de conservation de l'énergie mécanique: Si un mobile ne subit que des forces conservatives, son énergie mécanique est constante.

Symboliquement, nous écrirons:

$$\boxed{E_m = E_c + E_p} \qquad \text{et} \qquad \boxed{E_m(1) = E_m(2)}$$

Cette loi exprime, dans le cas particulier de la mécanique, une des lois les plus importantes de la physique, la loi de conservation de l'énergie.

Comme le montrent les exemples des paragraphes 90 et 94, sa simplicité et son efficacité sont remarquables. Soulignons toutefois que son utilisation serait illicite dans des situations où apparaissent des forces non-conservatives, par exemple des frottements ou des forces de propulsion. Dans de tels cas, on peut utiliser le théorème de variation de l'énergie cinétique, dont le domaine de validité ne connaît pas de limitations (du moins dans la mécanique newtonienne).

Lorsqu'un objet tombe en chute libre, son énergie potentielle décroît et son énergie cinétique croît. La croissance de la seconde est égale à la décroissance de la première, de sorte que la somme des deux énergies ne varie pas. Voir: exemples 1 à 5 du paragraphe 94.

Lorsqu'un wagon de chemin de fer arrive contre un butoir, son énergie cinétique décroît et son énergie potentielle croît d'autant. La contraction du ressort est maximale lorsque la vitesse s'annule. Ensuite le wagon est remis en mouvement en sens inverse, l'énergie potentielle décroissant jusqu'à zéro et l'énergie cinétique croissant jusqu'à sa valeur maximale. La conservation de l'énergie mécanique implique évidemment que la vitesse du wagon a la même grandeur avant et après le contact avec le butoir, pour autant qu'aucune force non-conservative n'intervienne dans le processus. Voir: exemple 6 du paragraphe 94.

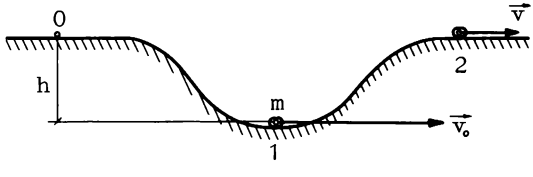
Il est commode d'interpréter la loi de conservation de l'énergie mécanique en termes de transformations. Lorsqu'on voit, par exemple, l'énergie cinétique diminuer et l'énergie potentielle augmenter, leur somme étant constante, on est fondé à dire que de l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle. C'est ainsi que le mouvement d'un pendule s'accompagne de transformations alternées d'une énergie en l'autre. Cette conception s'étend aux autres formes d'énergie qu'on peut encore introduire.

§ 90 Vitesse de libération

a) Vitesse de libération hors d'un trou

Considérons un objet de masse m catapulté à une vitesse de grandeur v_o, depuis le fond d'un trou de profondeur h, creusé dans le sol. Nous supposons que le trou a une symétrie de révolution d'axe vertical, que ses bords sont arrondis et que l'objet glisse sans subir de frottement ni jamais décoller.

Nous envisageons d'abord le cas où la vitesse initiale v_o est assez grande pour que l'objet puisse sortir du trou. Les forces qu'il subit - son poids et une force perpendiculaire à ses déplacements - sont conservatives. Son énergie mécanique est donc la même en tout point de sa trajectoire et on peut écrire:



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 + mg(-h) = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0.$$

La vitesse résiduelle du mobile lorsqu'il arrive hors du trou est donc

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2gh}.$$

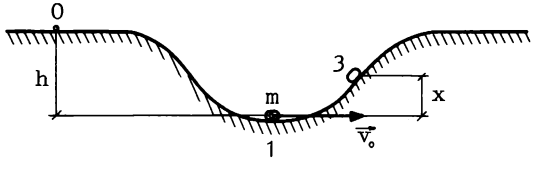
Cette vitesse est indépendante de la forme du trou, et de la masse du mobile. Ce résultat n'a de sens que si la quantité sous la racine est supérieure ou égale à zéro. On a:

$$v_o^2 - 2gh \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad v_o \geq \sqrt{2gh}.$$

$\sqrt{2gh}$ représente la vitesse minimale que doit avoir l'objet au fond du trou pour pouvoir en sortir. On peut l'appeler vitesse de libération.

$$v_{lib} = \sqrt{2gh}.$$

Supposons maintenant que la vitesse initiale soit trop petite pour permettre à l'objet de sortir. L'objet monte jusqu'en un point 3, s'arrête, puis redescend. L'équation de conservation de l'énergie mécanique s'écrit ici:



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(3) + E_p(3)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 + mg(-h) = 0 + mg(-h + x).$$

La hauteur dont s'élève l'objet est donc:

$$x = \frac{v_o^2}{2g}.$$

Cette hauteur est indépendante de la forme du trou, et de la masse du mobile. Ce résultat n'a de sens que si

$$x < h \qquad \text{ou} \qquad \frac{v_o^2}{2g} < h \qquad \text{ou encore} \qquad v_o < \sqrt{2gh}$$

c'est-à-dire si v_o est inférieur à la vitesse de libération.

La discrimination entre les cas envisagés relève exclusivement des énergies:

Dans le cas limite où la vitesse initiale est égale à la vitesse de libération, l'objet arrive hors du trou avec une vitesse nulle, et une énergie cinétique nulle. D'autre part, d'après le choix du point de référence, l'énergie potentielle est nulle à ce niveau. L'énergie mécanique est donc nulle, d'ailleurs non seulement en ce point mais en tout point du trajet. Lorsque le mobile est dans le trou, elle est composée d'un terme cinétique, positif, et d'un terme potentiel, négatif, de même valeur absolue.

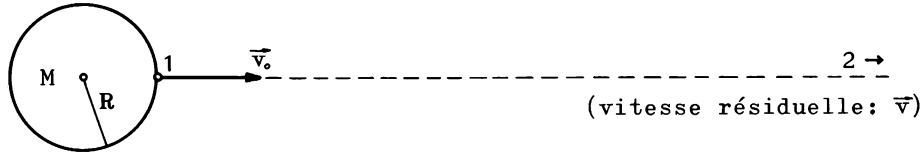
Si la vitesse initiale est supérieure à la vitesse de libération, le mobile arrive hors du trou avec une vitesse non nulle. Là, l'énergie potentielle est nulle, et l'énergie cinétique positive. Ce cas correspond donc à celui d'une énergie mécanique positive.

Si la vitesse initiale est inférieure à la vitesse de libération, le mobile s'arrête en un point, avant d'arriver hors du trou. En ce point, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle négative. La somme de ces deux énergies est négative. Ce cas correspond donc à celui d'une énergie mécanique négative.

b) Vitesse de libération hors du champ de gravitation terrestre

Considérons un objet lancé verticalement à une vitesse $\vec{v}_o$ depuis la surface de la terre. Nous supposons que la résistance de l'air et le champ de gravitation du soleil ou des autres astres n'ont pas d'influence sur l'objet. Nous désignons par M la masse de la terre, par R son rayon et par m la masse de l'objet.

Envisageons d'abord le cas où l'objet a une vitesse initiale suffisante pour quitter définitivement la terre.



L'objet ne subit que la force de gravitation, qui est conservative. Son énergie mécanique est donc la même à la surface de la terre et hors du champ de gravitation terrestre. (Par abus de langage, on dit qu'un objet est hors du champ de gra-

vitation terrestre, s'il est suffisamment éloigné de la terre pour que les effets de ce champ soient négligeables.)

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R} = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

L'objet arrive donc hors du champ de gravitation avec une vitesse résiduelle

$$v = \sqrt{v_o^2 - \frac{2GM}{R}}.$$

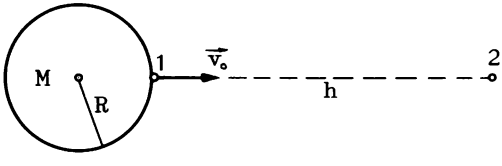
Ce résultat n'a de sens que si la quantité sous la racine est supérieure ou égale à zéro. On a:

$$v_o^2 - \frac{2GM}{R} \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad v_o \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

$\sqrt{2GM/R}$ représente la vitesse minimale que doit avoir l'objet à la surface de la terre pour pouvoir sortir du champ de gravitation. On l'appelle <u>vitesse de libération.</u>

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2.6,67.10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}.5,99.10^{24}\ \mathrm{kg}}{6,37.10^{6}\ \mathrm{m}}} \cong 11,2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Supposons maintenant que la vitesse initiale soit trop petite pour que l'objet sorte du champ de gravitation terrestre. Il atteint une altitude maximale h, s'arrête, puis retombe. L'équation de conservation de l'énergie mécanique s'écrit ici:



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{R+h}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $2R.(R + h)$, et simplifions par m.

$$R(R + h)v_o^2 - 2(R + h)GM = -2RGM$$

En résolvant cette équation par rapport à h, on trouve:

$$h = \frac{R^2 v_o^2}{2GM - Rv_o^2}. \qquad (1)$$

Ce résultat n'a de sens que s'il fournit une valeur positive pour h. Il faut donc que

$$2GM - Rv_o^2 > 0 \qquad \text{ou} \qquad v_o < \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

L'objet ne retombe sur la terre que si la vitesse initiale est inférieure à la vitesse de libération.

Dans le cas limite où la vitesse initiale est égale à la vitesse de libération, l'objet arrive hors du champ avec une vitesse nulle. Ses énergies cinétique et potentielle sont aussi nulles. Ce cas limite correspond donc à celui d'une énergie mécanique nulle. Si la vitesse initiale est supérieure à la vitesse de libération, l'énergie mécanique est positive. Si la vitesse initiale est inférieure à la vitesse de libération, l'énergie mécanique est négative.

Il est intéressant de voir la forme que prend l'expression de h dans le cas particulier où la vitesse initiale v_o est beaucoup plus petite que la vitesse de libération. Dans ce cas, on a:

$$v_o \ll \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \text{et} \qquad Rv_o^2 \ll 2GM.$$

Au dénominateur de la formule (1), Rv_o^2 est négligeable devant 2GM. Il s'ensuit:

$$h \cong \frac{R^2 v_o^2}{2GM}.$$

Or on se souvient que l'accélération de la pesanteur vaut

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

On a donc: $$h \cong \frac{v_o^2}{2g},$$

résultat qui est confirmé par celui de l'exemple 1 du paragraphe 94.

§ 91* Variation de l'énergie mécanique

Si un mobile n'est sollicité que par des forces conservatives, son énergie mécanique est constante, avons-nous vu. Il s'ensuit que si l'énergie mécanique d'un corps varie, il est sollicité par des forces non-conservatives. Recherchons la relation entre celles-ci et les variations d'énergie mécanique. Soient $\vec{F}_c$ la résultante des forces conservatives et $\vec{F}_n$ la résultante des forces non-conservatives qui s'exercent sur un point matériel. Le théorème de variation de l'énergie cinétique permet d'écrire:

$$A_{12}(\vec{F}_c) + A_{12}(\vec{F}_n) = E_c(2) - E_c(1)$$

Exprimons le travail des forces conservatives comme une différence d'énergie potentielle (§ 88).

$$E_p(1) - E_p(2) + A_{12}(\vec{F}_n) = E_c(2) - E_c(1)$$

On en tire:

$$A_{12}(\vec{F}_n) = E_c(2) + E_p(2) - E_c(1) - E_p(1)$$

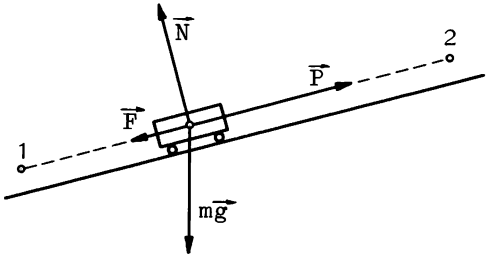
et

$$\boxed{A_{12}(\vec{F}_n) = E_m(2) - E_m(1).}$$

$A_{12}(\vec{F}_n)$ représente le travail de la résultante des forces non-conservatives, ou la somme des travaux de ces forces. On peut énoncer:

> Théorème: La somme des travaux des forces non-conservatives qui s'exercent sur un point matériel, sur une portion de trajectoire, est égale à son accroissement d'énergie mécanique.

A titre d'exemple, considérons un véhicule remorqué sur un plan incliné, et montant. Le mobile est soumis à deux forces conservatives - la pesanteur $m\vec{g}$ et une force normale $\vec{N}$ de la part de la route - et à deux forces non-conservatives - la force de propulsion $\vec{P}$ et le frottement $\vec{F}$. On peut écrire:



$$A_{12}(\vec{P}) + A_{12}(\vec{F}) = E_m(2) - E_m(1).$$

Le travail de la force de propulsion est positif. Il contribue à donner un accroissement positif à l'énergie mécanique du véhicule. En revanche, le travail de la force de frottement, qui est négatif, tend à donner un accroissement négatif, c'est-à-dire une diminution, à l'énergie mécanique. Suivant les valeurs respectives de ces deux termes, l'énergie mécanique augmente, est constante, ou diminue.

Ce qui précède montre qu'on peut considérer les forces non-conservatives comme responsables des variations d'énergie mécanique d'un mobile. Plus encore, on peut considérer le travail de chacune de ces forces comme une mesure de l'énergie mécanique apportée par cette force au mobile. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le travail de la force de propulsion exprime l'énergie mécanique apportée au véhicule par l'agent propulseur. Et le travail de la force de frottement exprime l'énergie mécanique enlevée au véhicule par les frottements.

L'énergie mécanique enlevée à un mobile par les frottements disparaît-elle, ou va-t-elle quelque part ? On sait que les particules constituant la matière sont continuellement en mouvement, et que ces mouvements sont d'autant plus rapides que la température est élevée. Chaque fois qu'un corps glisse ou roule sur un autre, les particules des surfaces en contact subissent d'innombrables chocs. Il en résulte que leur énergie mécanique est augmentée. A notre échelle, cela se manifeste comme une élévation de température. L'expérience confirme bien cela, un frottement s'accompagne d'une production de chaleur. On a de bonnes raisons d'admettre que l'énergie mécanique perdue par frottement réapparaît intégralement sous forme de chaleur.

D'autre part, nous avons vu qu'une force motrice apporte de l'énergie mécanique à un mobile. Cette énergie est-elle créée ou vient-elle de quelque part ? Si le véhicule est propulsé par un moteur à explosion, il est raisonnable d'admettre que l'énergie se trouvait en réserve dans les molécules du carburant. S'il est propulsé par un moteur électrique et que le courant électrique est produit dans une centrale hydro-électrique, on peut constater que le gain d'énergie mécanique du véhicule est fait au prix d'une perte de l'énergie potentielle d'une certaine quantité d'eau.

La physique postule que l'énergie se conserve. Elle peut se transformer ou être transférée d'un objet à un autre, mais elle ne se crée ni ne se perd.

§ 92* Equivalence de la masse et de l'énergie

Une importante conséquence de la théorie de la relativité est l'équivalence de la masse et de l'énergie. La célèbre formule d'Einstein

$$E = mc^2$$

traduit cette équivalence. c est la vitesse de la lumière dans le vide (3.10^8 m/s). La grande valeur numérique de c implique qu'à une masse relativement petite correspond une énergie énorme.

Une série d'exemples va mettre en évidence la signification et la portée de cette équivalence.

Certaines réactions nucléaires (fission, fusion) sont telles que la masse totale des particules participantes est plus petite après la réaction qu'avant. De la masse disparaît du système. Cela implique que de l'énergie disparaît aussi du système. En vertu du principe général de conservation de l'énergie, on conclut qu'une quantité équivalente d'énergie apparaît quelque part ailleurs. Elle peut apparaître sous forme de chaleur communiquée au milieu ambiant ou associée à une radiation électromagnétique.

Une onde électromagnétique, la lumière par exemple, porte avec elle de l'énergie. Cette énergie est équivalente à une masse et doit par conséquent subir l'influence d'un champ de gravitation. On a en effet pu observer, lors d'éclipses de soleil, que des rayons lumineux provenant d'étoiles et passant très près du soleil, sont légèrement déviés par son champ de gravitation.

La masse m d'un corps en mouvement par rapport à l'observateur est plus grande que la masse m_0 de ce corps au repos. L'énergie mc^2 portée par le corps en mouvement est donc supérieure à l'énergie m_0c^2 portée par le corps immobile. L'énergie imputable au mouvement du corps est donc la différence entre mc^2 et m_0c^2. Ce n'est pas autre chose que l'énergie cinétique du mobile. De façon générale, celle-ci s'exprime donc par la relation:

$$E_c = mc^2 - m_0c^2.$$

On peut calculer cette énergie en fonction de la vitesse v du mobile, en remplaçant m par l'expression relativiste

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Transformons d'abord cette expression. Posons

$$\frac{v}{c} = \beta.$$

Et utilisons le développement en série:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n - 1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

$$m = m_o(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = m_o(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots)$$

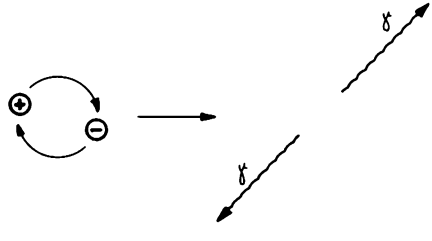
L'énergie cinétique vaut donc:

$$E_c = m_o c^2(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots) - m_o c^2 = \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{3}{8} m_o v^2 \beta^2 + \ldots$$

Si le mobile a une vitesse nettement inférieure à celle de la lumière, β est beaucoup plus petit que 1. Tous les termes de la série sont négligeables à partir du second et on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m_o v^2.$$

Lorsque de la matière rencontre de l'antimatière, elles s'annihilent mutuellement et une radiation électromagnétique est produite, les lois de conservation de la physique étant évidemment respectées. Cette situation se présente, par exemple, lorsqu'un électron positif rencontre un électron ordinaire, négatif. Toute la masse des électrons est transformée en énergie, qui apparaît dans une paire de rayons γ.



Examinons les masses et les énergies dans un processus de radioactivité ou de fission. Un noyau instable, à peu près immobile, se scinde en deux (ou plusieurs) particules qui sont éjectées à grande vitesse. Soient:

$m_\circ$: la masse du noyau initial

m' et m'' : les masses des particules produites, juste après l'explosion

$m'_\circ$ et $m''_\circ$: les masses de ces particules, au repos.

La loi générale de conservation de l'énergie s'exprime ici comme une loi de conservation des masses, à cause de l'équivalence de ces grandeurs. On a donc:

$$m_\circ = m' + m''.$$

Les particules éjectées ont des masses supérieures à leurs masses au repos, parce qu'elles sont en mouvement. Par chocs contre les particules du milieu ambiant, elles perdent progressivement leur énergie cinétique. Leurs masses diminuent simultanément jusqu'à ce qu'elles atteignent les valeurs $m'_\circ$ et $m''_\circ$. L'énergie communiquée sous forme de chaleur au milieu ambiant est égale à la somme des énergies cinétiques perdues par les deux particules.

$$\Delta E = (m' - m'_\circ)c^2 + (m'' - m''_\circ)c^2 = (m' + m'')c^2 - (m'_\circ + m''_\circ)c^2$$

$$= m_\circ c^2 - (m'_\circ + m''_\circ)c^2 = \left(m_\circ - (m'_\circ + m''_\circ)\right) c^2.$$

Elle est donc égale à la diminution de masse au repos du système, multipliée par c^2.

Pour autant qu'aucune énergie ne soit emportée hors du milieu ambiant, on peut dire que sa masse totale ne varie pas. Les deux particules communiquent de l'énergie cinétique aux particules qui les entourent. Le gain d'énergie (ou de masse) de l'environnement des deux particules est égal à la perte d'énergie (ou de masse) de ces deux particules.

§ 93* Liaison de deux particules

Nous envisageons ici un système de deux corps assimilables à des points matériels et exerçant des forces d'attraction l'un sur l'autre. Il peut arriver que les constituants soient liés de manière stable par cette force attractive. Lorsqu'il en est ainsi, ils ne peuvent plus se séparer l'un de l'autre sans l'intervention d'agents extérieurs. Ils constituent alors ce que nous appellerons un système lié. C'est le cas de la terre et de la lune, liées par une force gravifique. C'est aussi le cas du proton et de l'électron d'un atome d'hydrogène, liés par une force électrique. C'est encore le cas du proton et du neutron constituant un deuton, liés par des forces nucléaires.

Les forces d'attraction que l'on rencontre dans la nature, qu'elles soient gravifiques, électriques ou nucléaires, décroissent lorsque la distance entre les particules croît, et peuvent être considérées comme nulles lorsque la distance est suffisante. C'est dans cette position particulière des particules que l'on convient de choisir le zéro de l'énergie potentielle. Il résulte de ce choix, et du caractère attractif de la force, que l'énergie potentielle est négative pour toute distance finie des particules, et tend vers zéro lorsque cette distance tend vers l'infini. L'exemple typique de cela est fourni par l'énergie potentielle de gravitation, avec laquelle le lecteur s'est maintenant familiarisé.

Considérons deux exemples particuliers de systèmes liés par une force de gravitation.

Le premier est celui d'un astre (de masse M) possédant un satellite (de masse m) sur une orbite circulaire. Au paragraphe 74, nous avons calculé que si le satellite est à une distance r de l'astre (supposé de beaucoup plus grande masse), sa vitesse vaut

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Son énergie mécanique vaut alors

$$E_m = E_c + E_p = \tfrac{1}{2} m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\tfrac{1}{2} \frac{GMm}{r}.$$

Elle est toujours négative.

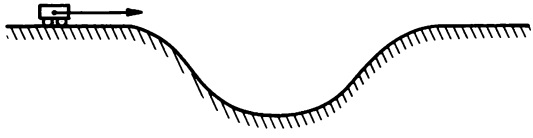
Le second est celui d'un objet jeté verticalement depuis la surface de la terre (§ 90). Nous avons montré que si sa vitesse initiale est inférieure à sa vitesse de libération, c'est-à-dire s'il est lié à la terre, son énergie mécanique est négative.

Il s'agit là d'un fait général, indépendant du type de force. A un état lié correspond une énergie mécanique négative.

Supposons que deux particules qui s'attirent soient initialement très éloignées l'une de l'autre. L'énergie mécanique du système, composée initialement d'énergie cinétique seulement, est positive (ou éventuellement nulle). Sous l'influence de la force d'attraction, que nous supposons conservative, les particules se rapprochent. L'énergie mécanique étant constante, l'énergie cinétique croît, et l'énergie potentielle, qui est négative, décroît. Rien n'empêche les particules de se trouver après un certain parcours, à une grande distance l'u-

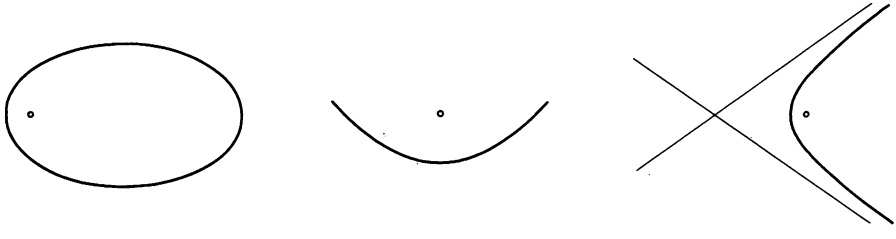
ne de l'autre, avec une énergie potentielle nulle et une énergie cinétique positive. Un tel système n'est donc pas lié. Pour que deux particules se lient, il ne suffit pas qu'elles s'attirent mutuellement et passent l'une près de l'autre. Il faut que le système perde de l'énergie. Il faut qu'il en perde suffisamment pour passer d'un état d'énergie mécanique supérieure ou égale à zéro, à un état d'énergie mécanique négative.

L'exemple du trou dans le sol (§ 90) fait bien comprendre cela. Si un objet en mouvement en dehors du trou (énergie mécanique positive) tombe dans celui-ci, il a une énergie suffisante pour en ressortir. Il ne reste



croché dans le trou que s'il perd de l'énergie, par exemple grâce aux frottements, de manière à avoir finalement une énergie mécanique négative.

On peut montrer que la trajectoire d'un corps dans le champ de gravitation d'un astre est toujours une conique (ellipse, parabole ou hyperbole). Si l'énergie mécanique est négative, le corps est lié à l'astre, et sa trajectoire est une ellipse. C'est la situation des planètes et des comètes périodiques. Si l'énergie mécanique est positive, le corps n'est pas lié, et sa trajectoire est une hyperbole. C'est la situation des comètes non-périodiques. Dans le cas limite de l'énergie mécanique nulle, qui correspond aussi à un état non-lié, la trajectoire est une parabole. Dans tous les cas, l'astre se trouve à un foyer de la conique.



$E_m < 0$ $E_m = 0$ $E_m > 0$

Considérons un corps assez éloigné du soleil pour être pratiquement hors de son champ de gravitation. Sa trajectoire est une droite. S'il s'approche en quelque mesure du soleil, il subit une accélération. Sa vitesse croît et sa trajectoire

s'incurve vers le soleil. Mais comme son énergie mécanique est positive, il ne peut être satellisé. Sa trajectoire est une hyperbole. Il s'éloigne du soleil et sort de son champ de gravitation. Les supports de ses vitesses initiale et finale constituent les asymptotes de l'hyperbole qu'il a décrite.

Lorsqu'un électron passe dans le voisinage d'un proton, on pourrait s'attendre à une situation tout à fait analogue: trajectoire hyperbolique et impossibilité de satellisation. En fait, le système proton-électron est capable de perdre de l'énergie par rayonnement électromagnétique de manière à devenir un système lié, un atome d'hydrogène. La mécanique quantique établit qu'un électron ne peut pas décrire n'importe quelle trajectoire autour d'un proton, ou d'un noyau, mais que seules certaines trajectoires sont possibles. Au lieu de trajectoires, on parle plutôt d'états ou de niveaux énergétiques possibles. Un électron se trouvant à un niveau d'énergie mécanique E peut sauter spontanément à un niveau d'énergie inférieur E', s'il en existe un. Conformément au principe de conservation de l'énergie, l'énergie perdue par l'atome, E - E', se retrouve alors dans un quantum de radiation électromagnétique. Il s'agit d'une petite onde dont la fréquence ν est proportionnelle à l'énergie qu'elle emporte hors de l'atome.

$$E - E' = h\nu.$$

h est une constante universelle appelée constante de Plank, et valant

$$h = 6{,}626.10^{-34}\ \text{Js}.$$

Chaque atome a ses niveaux énergétiques particuliers, dépendant essentiellement du nombre de protons contenu dans son noyau. Les différences d'énergie existant entre ces niveaux, et par conséquent les fréquences des radiations pouvant être émises par l'atome, sont donc des caractéristiques propres de chaque élément chimique. De là vient qu'à chaque élément correspond un ensemble de raies spectrales bien déterminées.

Nous avons montré plus haut que si deux particules initialement séparées se rapprochent sous l'influence d'une force d'attraction, elles ne peuvent constituer de système lié qu'à condition de perdre de l'énergie mécanique. Si les particules ont une vitesse initiale négligeable, le système passe d'un état d'énergie mécanique nulle à un état d'énergie mécanique négative. L'énergie perdue lors de la liaison est appelée énergie de liaison. C'est aussi l'énergie qu'il faut fournir au système si l'on veut délier les particules. En raison de l'équivalence de la masse et de l'énergie (§ 92), on voit que lorsque deux particules se lient, le système subit une perte

de masse. Cela implique que la masse d'un système lié est toujours inférieure à la somme des masses des constituants. Le défaut de masse et l'énergie de liaison sont liés par l'égalité

$$\Delta E = \Delta m . c^2 .$$

A titre d'exemple, calculons le défaut de masse du système terre-lune. L'énergie de liaison est égale à l'opposé de l'énergie mécanique du système. Comme la lune a une trajectoire à peu près circulaire, le calcul fait ci-dessus est valable. On a:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} \frac{GMm}{r} = \frac{6,67.10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2} . 5,99.10^{24}\ kg . 7,36.10^{22}\ kg}{2 . 3,84.10^{8}\ m}$$

$$= 38,3.10^{27}\ J.$$

Le défaut de masse du système est:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{38,3.10^{27}\ J}{9.10^{16}\ m^2 s^{-2}} = 4,26.10^{11}\ kg.$$

C'est en fait une quantité minime en comparaison de la masse du système. Le rapport ne vaut que

$$\frac{\Delta m}{M + m} = \frac{4,26.10^{11}\ kg}{6,06.10^{24}\ kg} \cong 10^{-13}.$$

On peut en conclure que la liaison gravifique entre la terre et la lune est une <u>liaison très faible.</u>

Dans un deuton, le défaut de masse est, comparativement, beaucoup plus grand. On a les valeurs numériques suivantes:

masse du proton:	$1,672.10^{-27}$ kg
masse du neutron:	1,675.
somme de ces masses:	3,347.
masse du deuton:	3,344.
défaut de masse:	0,003.

La valeur relative du défaut de masse est

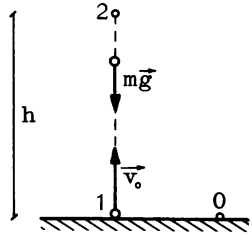
$$\frac{\Delta m}{M + m} = \frac{0,003}{3,344} \cong 10^{-3}.$$

On peut en conclure que la liaison entre les deux particules qui constituent un deuton est une <u>liaison très forte.</u>

§ 94 Exemples de calcul

Exemple 1: Un objet est lancé verticalement en l'air, depuis le sol, à une vitesse $\vec{v}_o$. Quelle est la hauteur h qu'il atteint si les frottements sont négligeables. On suppose que v_o n'est pas trop grand (qu'il est beaucoup plus petit que la vitesse de libération).

△△△ Le mobile ne subit qu'une force, son poids $m\vec{g}$ qui est le même en tout point. L'énergie potentielle associée est



$$E_p = mgz.$$

Le point de référence peut être choisi au sol. La loi de conservation de l'énergie mécanique fournit

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 + 0 = 0 + mgh.$$

L'objet atteint donc une hauteur

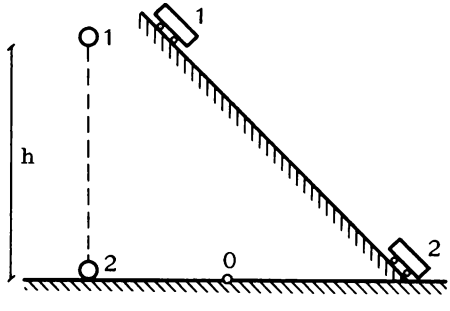
$$h = \frac{v_o^2}{2g}.$$

Ce résultat est indépendant de la masse de l'objet.

Exemple 2: Un objet ayant une vitesse initiale nulle descend d'une hauteur h
- en chute libre,
- sur un plan incliné.

Calculer sa vitesse finale, si les frottements sont négligeables.

△△△ Le mobile subit une force conservative, son poids, et, dans un des cas, une force normale à la trajectoire. On peut appliquer la loi de conservation de l'énergie mécanique.



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

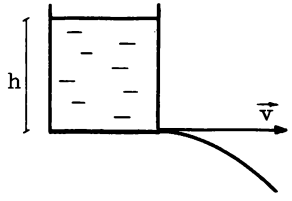
Choisissons au sol le point de référence de l'énergie potentielle. On a, en désignant par v la vitesse finale:

$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

d'où $$v = \sqrt{2gh}.$$

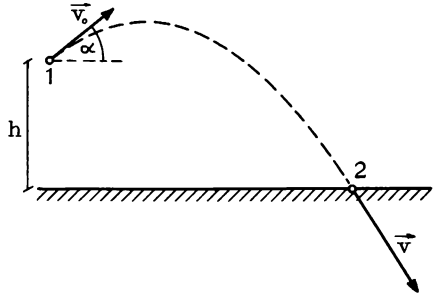
Le résultat est le même pour la chute libre et pour la descente sur un plan incliné.

Il peut être étendu à d'autres cas analogues. On peut montrer qu'il est valable pour exprimer la vitesse de sortie d'un liquide par un trou situé à une hauteur h au-dessous de la surface libre. Dans ce cas, tout se passe comme si les gouttes de la partie supérieure du liquide tombaient d'une hauteur h. (Cf § 130.)



Exemple 3: Depuis une hauteur h au-dessus du sol, on lance un objet à une vitesse $\vec{v_o}$ faisant un angle α avec l'horizontale. Calculer la grandeur de sa vitesse lorsqu'il arrive au sol.

△△△ Le mobile ne subit qu'une seule force, $m\vec{g}$, qui est conservative. La loi de conservation de l'énergie mécanique fournit:



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

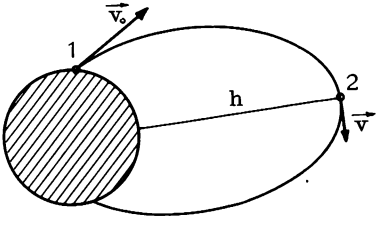
$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

La vitesse d'arrivée au sol a donc la grandeur

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2gh}.$$

Chose remarquable, le résultat est indépendant de l'angle α.

Exemple 4: Un objet est lancé depuis la terre à une vitesse $\vec{v_o}$. Il décrit la trajectoire elliptique dessinée ci-contre. Son apogée se trouve à une altitude h au-dessus de la terre. Calculer la grandeur de sa vitesse à son apogée et à son retour sur la terre.



△△△ On désigne par M la masse de la terre et par R son rayon. Le mobile, dont la masse est m, ne subit qu'une seule force, la for-

ce de gravitation, qui est conservative. L'énergie mécanique se conserve donc.

En des points d'égale altitude, l'énergie potentielle est la même. L'énergie cinétique l'est donc aussi. Lorsque le mobile revient sur la terre, sa vitesse a la même grandeur qu'au départ.

En comparant les énergies au sol et à l'apogée, on peut écrire:

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R + h}$$

$$v_o^2 - \frac{2GM}{R} = v^2 - \frac{2GM}{R + h}$$

$$v^2 = v_o^2 - \frac{2GM}{R} + \frac{2GM}{R + h} = v_o^2 - 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right)$$

La vitesse à une altitude h est donc

$$v = \sqrt{v_o^2 - \frac{2GMh}{R(R + h)}}$$

Si l'altitude h est très petite en comparaison du rayon terrestre, le second terme vaut

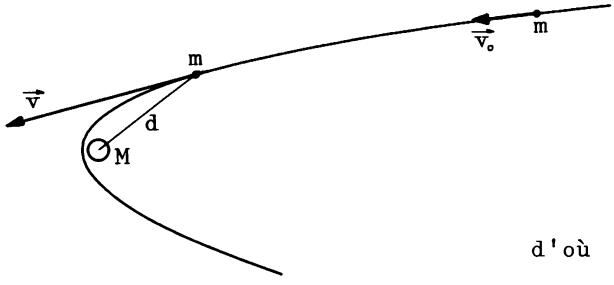
$$\frac{2GMh}{R(R + h)} \simeq \frac{2GMh}{R^2} = 2gh$$

et la vitesse prend la valeur

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2gh}.$$

Exemple 5: Un grain de matière de masse m passe dans le voisinage d'un astre de masse M. Lorsqu'il en était très éloigné, sa vitesse par rapport à l'astre avait une grandeur v_o. Calculer la grandeur de sa vitesse lorsqu'il est à une distance d du centre de l'astre.

ΔΔΔ Comme le grain de matière ne subit qu'une seule force, qui est conservative, son énergie mécanique est la même à une distance d de d'astre et hors de son champ de gravitation. En désignant par v la vitesse cherchée, on a:

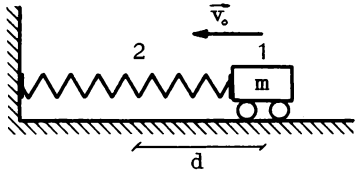


$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{d}$$

d'où $$v = \sqrt{v_o^2 + \frac{2GM}{d}}.$$

Exemple 6: Un chariot de masse m arrive à une vitesse v_o contre un ressort de constante k, posé sur un plan horizontal et retenu par une de ses extrémités. Calculer la contraction maximale du ressort, si les frottements sont négligeables.

△△△ Le wagonnet subit trois forces. Deux d'entre elles - le poids et la force de soutien - sont perpendiculaires à la trajectoire et ne travaillent pas. La troisième, celle qu'exerce le ressort, est conservative. L'énergie mécanique est donc conservée et on peut écrire:



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

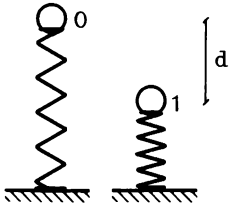
$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kd^2$$

La contraction maximale du ressort vaut donc:

$$d = v_o \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Exemple 7*: Une personne saute, depuis une très faible hauteur, sur une balance à ressort. Quelle est la valeur maximale indiquée par la balance ?

△△△ Le problème peut être idéalisé ainsi: un objet de masse m est posé, avec une vitesse initiale nulle, sur un ressort détendu et de masse négligeable. Quelle est la force maximale exercée sur lui par le ressort ?



L'objet subit deux forces conservatives, son poids $m\vec{g}$ et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort. L'énergie mécanique se conserve donc. Au point de départ (0), comme au point

le plus bas (1), l'énergie cinétique est nulle. En ces deux points, l'énergie potentielle est donc la même.

$$E_p(0) = E_p(1).$$

Choisissons 0 comme point de référence. L'énergie potentielle est ici la somme des énergies potentielles associées à chacune des forces. On a donc:

$$0 = mg(-d) + \tfrac{1}{2}kd^2.$$

On en déduit: $d = 0$ et $d = \frac{2mg}{k}$.

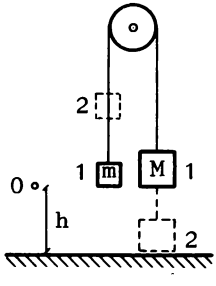
La première solution correspond au point 0, la seconde au point 1. La force exercée par le ressort sur l'objet au point 1 vaut

$$F = kd = k.\frac{2mg}{k} = 2mg.$$

L'aiguille de la balance saute donc jusqu'au double de la valeur du poids de la personne. On peut remarquer que la contraction maximale du ressort est le double de ce qu'elle serait si la personne était immobile sur la balance.

Exemple 8: Deux objets de masses m et M (avec M > m) sont attachés aux extrémités d'un fil. Celui-ci est passé sur une poulie d'axe horizontal et de masse négligeable. Initialement, les deux objets sont immobiles au même niveau, à une hauteur h au-dessus du sol. On abandonne le système à lui-même. Calculer la vitesse à laquelle l'objet le plus lourd arrive au sol.

△△△ L'énergie mécanique de chaque mobile, pris isolément, ne se conserve pas, car les forces exercées par le fil ne sont pas conservatives. En revanche, d'après le principe général de conservation de l'énergie, on a toutes les raisons d'admettre que l'énergie mécanique totale du système se conserve. En effet, on ne voit pas comment le système échangerait de l'énergie avec le milieu extérieur. En désignant par v la grandeur commune des vitesses des objets dans la situation finale 2, on peut écrire:



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

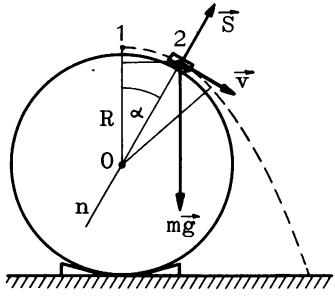
$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}Mv^2 + Mg(-h) + \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh$$

On en déduit: $v = \sqrt{\frac{2gh(M - m)}{M + m}}$.

Par l'intermédiaire du fil, de l'énergie mécanique est transmise de l'objet descendant à l'objet montant. C'est un peu comme quand l'eau d'un lac artificiel descend jusqu'à une usine électrique pour que des trains puissent recevoir de l'énergie mécanique.

Exemple 9*: Un wagonnet de masse m roule sans frottement sur une grosse boule de rayon R fixée sur le sol. Il part du sommet de la boule avec une vitesse pratiquement nulle. Déterminer la position du point où le wagonnet quitte la boule.

△△△ Calculons d'abord la vitesse du wagonnet en un point où il est encore en contact avec la boule. Comme il subit une force conservative ($m\vec{g}$) et une force qui ne travaille pas ($\vec{S}$) son énergie mécanique se conserve.



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$0 + mgR = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\alpha$$

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos\alpha)}.$$

Calculons maintenant la force de soutien $\vec{S}$ de la piste. Au point 2, l'équation de Newton s'écrit:

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}.$$

En projetant les vecteurs sur l'axe normal (on se souvient qu'il est orthogonal à la trajectoire et orienté vers sa concavité) on obtient:

$$mg\cos\alpha - S = ma_n.$$

Et la composante normale de l'accélération, ou accélération normale, vaut toujours

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

On en déduit: $mg\cos\alpha - S = m\frac{v^2}{R}$

et $mg\cos\alpha - S = \frac{m}{R}.2gR(1 - \cos\alpha)$.

La force de soutien vaut donc

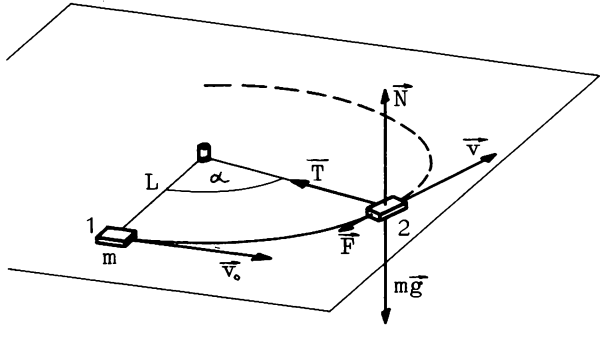
$$S = 3mg\cos\alpha - 2mg.$$

Pour trouver le point de décollement, il suffit de poser la condition que S s'annule.

$$3mg\cos\alpha - 2mg = 0 \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} \qquad \alpha = 48{,}2^{\circ}.$$

Exemple 10*: Un objet de masse m glisse sur un plan horizontal où il subit un frottement de grandeur constante F. Il est attaché à un point fixe du plan par un fil de longueur L. Initialement, le fil est tendu, et l'objet a une vitesse horizontale, de grandeur v_o, perpendiculaire au fil.
a) Calculer, en fonction de l'angle balayé par le fil depuis la position initiale, la grandeur de la traction du fil sur l'objet.
b) Calculer l'angle balayé par le fil jusqu'à ce que l'objet s'immobilise.

△△△ L'objet subit quatre forces: son poids $m\vec{g}$, une force de soutien $\vec{N}$, la traction du fil $\vec{T}$ et le frottement $\vec{F}$. La dernière étant non-conservative, on ne peut appliquer la loi de conservation de l'énergie mécanique. On peut toujours utiliser le théorème de variation de l'énergie cinétique.



$$A_{12}(m\vec{g}) + A_{12}(\vec{N}) + A_{12}(\vec{T}) + A_{12}(\vec{F}) = E_c(2) - E_c(1)$$

Les trois premiers travaux sont nuls, car les forces sont perpendiculaires à la trajectoire. Le quatrième, selon un résultat du paragraphe 83, est égal au produit de la grandeur de la force de frottement par la longueur du chemin parcouru et par -1. Or le chemin parcouru, un arc de cercle, est égal au produit du rayon par l'angle. On a ainsi:

$$-F\alpha L = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_o^2$$

Lorsque le fil a balayé un angle α, la vitesse a donc pour

grandeur

$$v = \sqrt{v_o^2 - \frac{2F\alpha L}{m}}. \qquad (1)$$

Elle s'annule lorsque $v_o^2 = \frac{2F\alpha L}{m}$.

L'objet s'immobilise donc lorsque l'angle balayé par le fil vaut

$$\alpha = \frac{mv_o^2}{2FL}.$$

Ecrivons l'équation de Newton.

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Projetons tous les vecteurs sur l'axe normal. Compte tenu de ce qui a été rappelé à l'exercice précédent, on obtient:

$$T = m\,\frac{v^2}{L}.$$

La traction du fil vaut donc, d'après l'égalité (1) et la dernière relation:

$$T = \frac{m}{L}\left(v_o^2 - \frac{2F\alpha L}{m}\right) = \frac{mv_o^2}{L} - 2F\alpha.$$

P

Chapitre 16

PUISSANCE

§ 95 Puissance

La plupart des transformations d'énergie s'opèrent au cours du temps. Par exemple, le carburant d'une voiture se consomme petit à petit pour fournir au véhicule de l'énergie mécanique. L'énergie cinétique d'un objet lancé sur un plan horizontal se transforme petit à petit en chaleur, par les frottements. L'énergie électrique consommée par une lampe se transforme au cours du temps en chaleur et en lumière.

Supposons que, pendant un intervalle de temps arbitraire Δt, une énergie ΔE soit transformée. Le rapport $\Delta E/\Delta t$ exprime la quantité d'énergie transformée par unité de temps. Ce rapport définit la puissance moyenne:

$$P_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

La puissance associée à la transformation est la limite de ce rapport quand l'intervalle Δt tend vers zéro.

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{P = \frac{dE}{dt}.}$$

Dans les cas où la puissance est constante, l'énergie transformée pendant un temps quelconque est proportionnelle à celui-ci. En désignant ce temps par t et l'énergie transformée par E, on peut alors écrire

$$P = \frac{E}{t}.$$

Ces situations sont dites stationnaires.

L'énergie fournie par un moteur se mesure par le travail qu'il effectue (d'après le théorème de variation de l'énergie ciné-

tique, § 86, ou de variation de l'énergie mécanique, § 91). Ainsi, la puissance d'un moteur s'exprime par le travail qu'il fournit par unité de temps.

$$P = \frac{dA}{dt}$$

Si le régime est stationnaire, on a

$$P = \frac{A}{t}.$$

Dans le système international d'unités (SI) la puissance se mesure en joules/seconde, unité appelée watt (abréviation: W).

$$1\ W = 1\ \frac{J}{s}.$$

Le kilowatt ($1\ kW = 10^3\ W$) et le mégawatt ($1\ MW = 10^6\ W$) sont des unités fréquemment employées.

La technique utilise encore une ancienne unité de puissance, le cheval-vapeur (abréviation: Ch), qui correspond approximativement à la puissance que peut développer un bon cheval pendant une longue durée. Le cheval-vapeur est défini à partir de l'ancienne unité de travail kg*m, et vaut 75 kg*m/s. Exprimé en unités du SI, il vaut

$$1\ Ch = 75\ \frac{kg*m}{s} = 75\ \frac{9{,}81\ Nm}{s} = 736\ W.$$

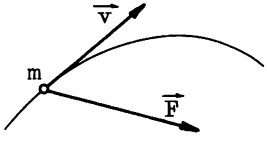
Dans les calculs où l'on se contente de l'approximation $g = 10\ ms^{-2}$, on doit évidemment poser: $1\ Ch = 750\ W$.

Si un processus auquel correspond une puissance constante P se déroule pendant un temps t, l'énergie mise en jeu vaut

$$E = Pt.$$

Tout produit d'une unité de puissance par une unité de temps constitue donc une unité d'énergie. Le kilowattheure en est un exemple.

$$1\ kWh = 1\ kW.1\ h = 10^3\ W.3{,}6.10^3\ s = 3{,}6.10^6\ J.$$



Considérons une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$. Pendant un petit intervalle de temps Δt, l'objet subit un déplacement

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{v}.\Delta t$$

et la force $\vec{F}$ effectue le travail

$$\Delta A = \vec{F}.\overrightarrow{\Delta r} = \vec{F}.\vec{v}.\Delta t.$$

On peut donc associer à la force $\vec{F}$ une puissance $P = \frac{\Delta A}{\Delta t}$

ou

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{v}.}$$

C'est la puissance "développée" par l'agent qui exerce la force. Voir l'exemple 4 du paragraphe 99.

§ 96* Rendement

Lorsqu'on transforme une énergie en une autre, il arrive souvent qu'il apparaisse de l'énergie sous une troisième forme. Par exemple, le moteur d'un trolleybus transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique. Mais le passage du courant électrique dans les bobinages du moteur et les frottements sur les parties mobiles amènent une perte d'énergie sous forme de chaleur. L'énergie électrique consommée par le moteur se transforme donc en énergie mécanique et en chaleur. Relativement au but que le moteur doit atteindre, les deux formes d'énergie obtenues peuvent être qualifiées d'énergie utile et d'énergie perdue.

Considérons les énergies mises en jeu par unité de temps, c'est-à-dire les puissances. D'après le principe général de conservation de l'énergie, il est certain que la puissance consommée par une machine quelconque est toujours égale à la somme de la puissance utile et de la puissance perdue. (Pour autant qu'il ne s'agisse pas d'une machine capable d'emmagasiner de l'énergie, pour la libérer à un autre moment!) Le rapport de la puissance utile à la puissance consommée exprime la qualité de la transformation. On lui donne le nom de rendement, et on le désigne par η.

$$\boxed{\eta = \frac{P_{utile}}{P_{consommée}}.}$$

Ce rapport peut varier de 0 à 1.

Dans le cas d'une génératrice, le rendement est le rapport de la puissance électrique obtenue à la puissance mécanique four-

nie à la génératrice.

Dans le cas d'un moteur électrique, le rendement est le rapport de la puissance mécanique reçue à la puissance électrique qui alimente le moteur.

Dans le cas d'un radiateur électrique, le rendement est le rapport de la puissance thermique à la puissance électrique consommée. Il vaut évidemment 1.

§ 97* Puissance d'un moteur

Commençons par analyser une situation concrète. Une réserve d'eau alimente une turbine située plus bas. La turbine entraîne une génératrice de courant électrique. Ce courant est amené à une ligne de chemin de fer et permet la propulsion d'un train à vitesse constante sur une voie horizontale. On a ici une suite de transformations et de transferts d'énergie. Au début de la chaîne, il y a de l'énergie potentielle qui disparaît, et à la fin, il y a de la chaleur qui apparaît. Par commodité de langage, on peut bien dire que le groupe turbine-génératrice transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique, que le moteur de la locomotive transforme l'énergie électrique en énergie mécanique, et que les frottements transforment l'énergie mécanique en chaleur. Mais il est clair que les formes intermédiaires d'énergie n'apparaissent pas de façon qu'on puisse dire qu'elles sont présentes à tel instant et à tel lieu. L'énergie électrique qu'il y a dans la ligne de transmission (et qu'il faudrait savoir définir) ou l'énergie mécanique que possède le train, sont des choses absolument distinctes de l'énergie transférée par la ligne ou par le train. On voit que la notion essentielle ici, à chaque chaînon du système, est la quantité d'énergie transférée par unité de temps, en d'autres termes la puissance transférée.

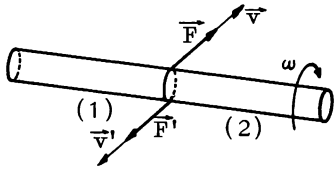
Dans les moteurs les plus courants (moteur électrique, moteur à explosion, turbine à eau, turbine à gaz) l'énergie est transmise au moyen d'une pièce tournante (rotor, vilbrequin, roues à aubes) solidaire d'une tige cylindrique appelée arbre du moteur. En même temps que l'énergie, l'arbre transmet aussi un couple, ou un ensemble de forces équivalent à un couple.

Limitons-nous au cas où chaque point de l'arbre a un mouvement circulaire uniforme. Nous dirons alors que l'arbre est en rotation uniforme. On appelle fréquence de rotation ν le nombre de tours qu'il effectue par unité de temps, et vitesse angulaire ω l'angle dont il tourne par unité de temps. Comme 1 tour correspond à un angle de 2π, la vitesse angulaire est une quantité 2π fois plus grande que la fréquence.

$$\omega = 2\pi\nu.$$

ω et ν se mesurent en s^{-1}.

Pour étudier la transmission d'énergie, considérons deux parties (1) et (2) d'un arbre moteur de rayon R. Supposons que la première entraîne la seconde. L'ensemble des forces exercées par (1) sur (2) est équivalent à un couple de forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ appliquées à la périphérie de l'arbre. Les points d'applications de ces forces ont des vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ respectivement parallèles à $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, et de même sens. Leur grandeur commune est (§ 23)



$$v = v' = \omega R.$$

La puissance transmise par l'arbre s'identifie à la puissance développée par le couple $\vec{F}$, $\vec{F}'$. Elle vaut donc:

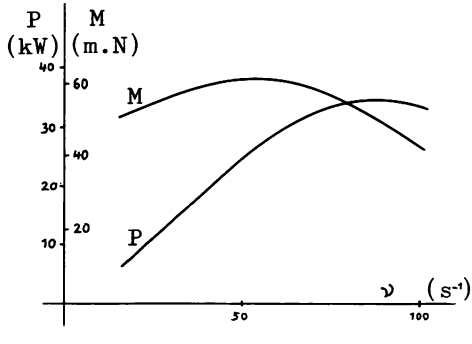
$$P = \vec{F}.\vec{v} + \vec{F}'.\vec{v}' = Fv + F'v' = 2Fv = 2F\omega R = F.2R.\omega.$$

2R est le diamètre de l'arbre. C'est aussi le bras de levier du couple. Le produit F.2R est donc la norme du moment $\vec{M}$ du couple. On en conclut:

$$P = M\omega.$$

La puissance transmise par un arbre est égale au produit du moment du couple qu'il exerce par sa vitesse angulaire.

La puissance d'un moteur, comme le moment de son couple, dépendent essentiellement de son régime de fonctionnement. Pour un moteur à explosion traditionnel, le couple maximal est atteint pour un régime d'environ 3000 tours/min. Aux régimes supérieurs, le couple diminue légèrement mais la puissance augmente à cause du facteur ω. La puissance atteint son maximum pour des régimes voisins de 5 à 6000 tours/min. Le graphique ci-contre donne

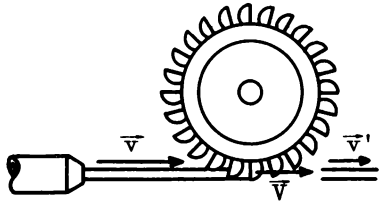


une idée de l'allure de ces fonctions et indique des ordres de grandeur correspondant à une cylindrée de 1100 cm³.

Pour déterminer expérimentalement la puissance d'un moteur, on peut utiliser la méthode du frein de Prony. Il s'agit d'un dispositif qui freine l'arbre moteur de manière à lui imposer une vitesse angulaire constante. Toute l'énergie fournie par le moteur est alors transformée en chaleur. On mesure cette vitesse angulaire ω et le moment M du couple de freinage. Le produit $M\omega$ est à la fois la puissance dissipée par le frein et la puissance produite par le moteur. C'est à l'aide d'un tel dispositif qu'on établit des courbes comme celles de la figure ci-dessus.

§ 98* Puissance d'une turbine

Un jet d'eau de débit D arrive à une vitesse $\vec{v}$ contre les aubes d'une turbine. La forme des aubes est telle que le jet est pratiquement réfléchi comme un objet qui effectue un choc central et élastique contre un autre. Selon ce qui est établi au paragraphe 103 cela signifie que pour un observateur situé sur une aube, le jet d'eau est réfléchi à une vitesse opposée à sa vitesse incidente. Si l'on désigne par $\vec{v}'$ la vitesse du jet après réflexion et par $\vec{V}$ la vitesse périphérique de la roue à aubes au point d'impact, ces vitesses étant relatives à un observateur fixe par rapport au socle de la turbine, on a:



$$\vec{v}' - \vec{V} = -(\vec{v} - \vec{V}) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}' = 2\vec{V} - \vec{v}. \qquad (1)$$

Pendant un intervalle de temps arbitraire Δt, le jet incident apporte une masse

$$\Delta m = \rho D \Delta t,$$

où ρ est la masse volumique de l'eau, et une énergie cinétique

$$\Delta E_1 = \tfrac{1}{2}(\rho D \Delta t) v^2.$$

La puissance du jet incident est donc:

$$P_1 = \frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\rho D v^2.$$

De même, la puissance du jet réfléchi est:

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\rho D v'^2$$

La puissance communiquée à la turbine est donc, compte tenu de la relation (1):

$$P = P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho D(v^2 - v'^2) = \tfrac{1}{2}\rho D(v^2 - 4V^2 + 4Vv - v^2)$$

$$P = 2\rho DV(v - V).$$

Désignons par ν la fréquence de rotation de la roue. Pendant un intervalle de temps Δt, la roue effectue $\nu\Delta t$ tours. Une aube, située à une distance R de l'axe, franchit un chemin dont la longueur est:

$$\Delta s = 2\pi R\nu\Delta t.$$

La vitesse périphérique V de la roue est donc

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\pi R\nu. \qquad (= \omega R)$$

Lorsque la turbine tourne à vide, la fréquence de rotation prend une valeur maximale ν_0, et la vitesse périphérique de la roue s'identifie à la vitesse du jet incident. On a donc:

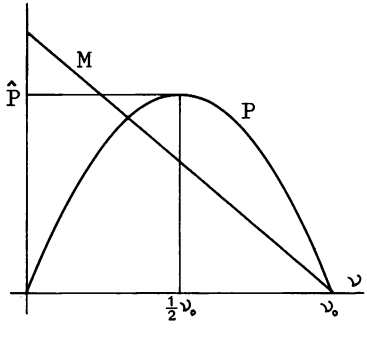
$$v = 2\pi R\nu_0.$$

La puissance de la turbine vaut ainsi:

$$P = 2\rho D.2\pi R\nu(2\pi R\nu_0 - 2\pi R\nu)$$

$$P = 8\pi^2\rho DR^2\nu(\nu_0 - \nu).$$

C'est une fonction quadratique de la fréquence de rotation. La courbe représentative est une parabole d'axe vertical. La puissance s'annule lorsque $\nu = 0$ et lorsque $\nu = \nu_0$. Dans ces deux cas, la vitesse finale du jet a la même grandeur que la vitesse initiale (elle est soit en sens inverse soit dans le même sens), de sorte qu'aucune énergie n'est communiquée à la turbine. La puissance est maximale lorsque $\nu = \frac{1}{2}\nu_0$. Elle vaut:



$$\hat{P} = 8\pi^2 \rho DR^2 \cdot \tfrac{1}{2}\nu_\circ \cdot \tfrac{1}{2}\nu_\circ = 2\pi^2 \rho DR^2 \nu_\circ^2.$$

Ce maximum de puissance se réalise lorsque la fréquence est la moitié de la fréquence maximale. Alors, la vitesse périphérique est aussi la moitié de la vitesse maximale, donc la moitié de la vitesse du jet incident. D'après la relation (1), la vitesse finale du jet est nulle et l'eau tombe sous la turbine. Ce sont les conditions idéales d'utilisation. La puissance du jet sortant étant nulle, toute la puissance du jet incident est communiquée à la turbine. Le lecteur vérifiera que $\hat{P}$ est bien égal à P_1.

Selon le paragraphe 97, le couple moteur de la turbine a pour moment:

$$M = \frac{P}{\omega} = 4\pi\rho DR^2 (\nu_\circ - \nu).$$

Il est maximum lorsque $\nu = 0$, diminue linéairement lorsque la fréquence croît, et s'annule lorsque $\nu = \nu_\circ$.

§ 99 Exemples de calcul

Exemple 1: Quelle est la puissance du moteur qu'il faut installer sur l'automotrice d'un train à crémaillère, si l'on veut que ce véhicule, qui a une masse de 20 tonnes, puisse s'élever de 1200 m en 45 min ?

△△△ Le moteur doit fournir une énergie mécanique (potentielle)

$$E = mgz = 2.10^4 \text{ kg}.10 \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}.1{,}2.10^3 \text{ m} = 2{,}4.10^8 \text{ J}$$

dans un temps

$$t = 45 \text{ min} = 2700 \text{ s}.$$

La puissance mécanique développée par le moteur doit donc valoir

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2{,}4.10^8 \text{ J}}{2{,}7.10^3 \text{ s}} = 0{,}89.10^5 \text{ W} \cong 90 \text{ kW}.$$

Exemple 2: Quelle est la puissance moyenne développée par une locomotive de 100 tonnes qui, remorquant un train de 400 tonnes parvient à le faire passer en 10 s d'une vitesse de 36 km/h à une vitesse de 54 km/h ?

△△△ L'énergie cinétique apparue est

$$E = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2}.5.10^5\,kg.(15^2 - 10^2)\frac{m^2}{s^2} = 3{,}13.10^7\,J.$$

La puissance cherchée est donc:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{3{,}13.10^7\,J}{10\ s} \cong 3{,}1.10^6\,W = 3{,}1\ MW.$$

Ce calcul ne tient pas compte des pertes d'énergie par frottement.

Exemple 3: Une lampe de 40 W reste allumée pendant 10 heures. Quel est le coût de l'énergie consommée si le kWh revient à 20 cts.

△△△ L'énergie électrique utilisée est

$$E = Pt = 0{,}040\ kW.10\ h = 0{,}4\ kWh.$$

Le coût en est: $0{,}4\ kWh.20\ \frac{cts}{kWh} = 8\ cts.$

La simplicité de ce calcul, fait avec des unités étrangères au SI, explique pourquoi le kWh est encore beaucoup utilisé.

Exemple 4: Une locomotive de 100 tonnes roule seule à 90 km/h sur une voie horizontale. En lui faisant donner son maximum de puissance, on parvient à lui faire avoir une accélération de 0,5 m/s^2. Calculer la puissance qu'elle développe alors. Négliger les frottements.

△△△ La force de propulsion subie vaut

$$F = ma = 10^5\,kg.0{,}5\ \frac{m}{s^2} = 5.10^4\,N.$$

La puissance développée par le moteur est alors (compte tenu du fait que $\vec{F}$ et $\vec{v}$ forment un angle nul):

$$P = \vec{F}.\vec{v} = Fv = 5.10^4\,N.25\ \frac{m}{s} = 1{,}25.10^6\,W = 1{,}25\ MW.$$

Exemple 5*: La fiche technique d'un moteur à explosion indique: couple maxi: 13 mkp (3000 tours/min). Interpréter ces données et calculer la puissance du moteur, en chevaux

△△△ Il faut comprendre qu'à une fréquence

$$\nu = 3000\ min^{-1} = 50\ s^{-1}$$

le moment maximal du couple sur l'arbre moteur vaut

$$M = 13 \text{ mkp} \cong 130 \text{ m.N.}$$

La puissance développée par le moteur dans ces conditions vaut

$$P = M\omega = M.2\pi\nu = 130 \text{ m.N} \cdot 2\pi.50 \text{ s}^{-1} \cong 41 \text{ kW.}$$

De l'équivalence 1 Ch $\cong$ 0,750 kW, on déduit:

$$1 \text{ kW} \cong \frac{1 \text{ Ch}}{0{,}750} = \frac{4}{3} \text{ Ch.}$$

Il s'ensuit: $P = 41 \text{ kW} = 41.\frac{4}{3} \text{ Ch} \cong 55 \text{ Ch.}$

Note. La fiche technique de ce même moteur indique une puissance maximale de 75 Ch à un régime de 5000 tours/min.

Exemple 6*: Un moteur fournit un couple de 100 m.N et tourne à une fréquence de 60 s^{-1}. Sur son arbre, une roue dentée comptant 18 dents entraîne une autre roue dentée comptant 30 dents et fixée à un arbre voisin. Que valent le couple et la fréquence sur l'autre arbre ?

△△△ Soient ν_1, ν_2, M_1, M_2, les fréquences et les moments de couples des deux arbres. Lorsque le moteur fait un tour, les 18 dents de la première roue entraînent 18 des 30 dents de la seconde roue dentée. Le second arbre fait donc 18/30 de tour. Le rapport de démultiplication est de 18/30. La fréquence du second arbre vaut

$$\nu_2 = \frac{18}{30}\nu_1 = \frac{18}{30}.60 \text{ s}^{-1} = 36 \text{ s}^{-1}.$$

Si les frottements sont négligeables, l'engrenage ne perd ni n'introduit d'énergie. La puissance sur chaque arbre est donc pratiquement la même et on peut écrire:

$$M_1\omega_1 = M_2\omega_2 \qquad \text{ou} \qquad M_1 2\pi\nu_1 = M_2 2\pi\nu_2 .$$

Le moment du couple sur le second arbre vaut donc:

$$M_2 = M_1\frac{\nu_1}{\nu_2} = 100 \text{ m.N} \cdot \frac{30}{18} = 167 \text{ m.N.}$$

Exemple 7*: Une usine hydro-électrique est installée au bord d'un fleuve. Le débit du courant d'eau dévié dans l'usine est de 200 m^3/s et la hauteur de chute est de 10 m. Quelle est la puissance électrique fournie par l'usine si le rendement de ses turbines est de 80 % et celui de ses alternateurs 90 % ?

△△△ Soient D le débit d'eau, h la hauteur de chute, η_1 et η_2

les deux rendements, et ρ la masse volumique de l'eau. Pendant un intervalle de temps arbitraire t, il passe dans l'usine une masse d'eau

$$m = Dt\rho.$$

L'énergie potentielle perdue par cette eau est

$$E = mgh = Dt\rho gh.$$

La puissance mécanique consommée par les turbines est

$$P_1 = \frac{E}{t} = D\rho gh.$$

La puissance mécanique fournie aux alternateurs vaut

$$P_2 = \eta_1 P_1 = \eta_1 D\rho gh.$$

La puissance électrique fournie par les alternateurs est alors

$$P_3 = \eta_2 P_2 = \eta_2 \eta_1 D\rho gh.$$

Sa valeur numérique est:

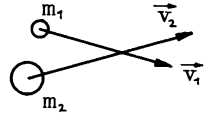
$$P_3 = 0{,}9.0{,}8.2.10^2 \frac{m^3}{s}.10^3 \frac{kg}{m^3}.10 \frac{m}{s^2}.10\ m = 1{,}44.10^7\ W \cong 14\ MW.$$

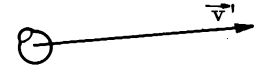
Chapitre 17

CHOCS

§ 100 Choc parfaitement mou

Considérons deux particules de masses m_1 et m_2 et de vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. Supposons qu'elles se heurtent et restent liées l'une à l'autre. Un tel choc est dit parfaitement mou, ou parfaitement inélastique. Si les particules ne subissent pas de forces de la part d'agents extérieurs, elles constituent un système isolé (§ 34) et leur quantité de mouvement totale se conserve.

Etat initial: 

Etat final: 

On a: $$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}'.$$

Cette équation permet de calculer la vitesse finale $\vec{v}'$.

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

L'énergie cinétique initiale du système vaut

$$E_i = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2.$$

L'énergie cinétique finale est

$$E_f = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2})^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 \vec{v_1}\vec{v_2} + m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

La variation d'énergie cinétique pendant le choc est:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 \vec{v_1}\vec{v_2} + m_2^2 v_2^2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{m_1 m_2 (2\vec{v_1}\vec{v_2} - v_1^2 - v_2^2)}{2(m_1 + m_2)} = \frac{-m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot (\vec{v_2} - \vec{v_1})^2.$$

Cette expression ne peut être que négative ou nulle. Elle est nulle si $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, mais alors il n'y a pas de choc. On voit donc qu'un choc parfaitement mou s'accompagne toujours d'une perte d'énergie cinétique. La physique admettant le principe de conservation de l'énergie, pourvu que l'on prenne en considération toutes ses formes possibles, nous devons nous demander où va l'énergie cinétique perdue dans un tel choc. La réponse à donner dépend des corps effectuant la collision.

S'il s'agit de deux boules de mastic, la déformation des objets entraîne des frottements internes qui dégagent de la chaleur. Il y a transformation d'énergie cinétique en chaleur.

Si la particule composée tourne sur elle-même, ou est le siège de vibrations, ces mouvements internes impliquent l'existence d'énergie cinétique ou potentielle. Dans un tel cas, l'énergie cinétique de translation perdue par le choc se transforme en énergie mécanique interne.

Lorsqu'un noyau d'atome capture un neutron, l'énergie cinétique perdue apparaît sous forme "d'énergie d'excitation". Le noyau est dans un état instable, dit excité, qui peut le conduire à se scinder (fission) ou à émettre une particule.

Le pendule balistique (Exemple 1 du § 105) constitue une intéressante application du choc parfaitement mou.

§ 101 Choc élastique

Considérons deux corps de masse m_1 et m_2, assimilables à des points matériels. Supposons qu'ils se heurtent puis s'éloignent l'un de l'autre. Soient $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ leurs vitesses initiales et $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ leurs vitesses finales. Le choc est dit <u>élastique</u> si l'énergie cinétique du système est conservée. Pour que cela se réalise, il faut qu'aucune des circonstances consommatrices d'énergie mentionnées au paragraphe précédent n'ait lieu. Les objets ne doivent pas subir de déformations permanentes (d'où le terme: élastique). S'il s'agit d'atomes, de noyaux ou de particules fondamentales, chaque particule doit être, après le choc, dans le même état qu'avant.

Sur un rail à coussin d'air, des glisseurs munis de ressorts réalisent de très bons chocs élastiques. Les ressorts se tendent en emmagasinant de l'énergie potentielle, puis se détendent en la libérant. Le choc de deux billes d'acier est aussi élastique. Comme les mobiles ne sont pas déformés de façon permanente par le processus, il faut admettre qu'ils se comportent comme des ressorts. La situation est à peu près la même s'il s'agit de balles de caoutchouc, quoique dans ce cas il

y ait transformation d'une petite partie de l'énergie cinétique en chaleur. Le heurt d'objets relativement tendres (pâte, corps humain, bois, plomb) est inélastique. Les collisions d'automobiles sont inélastiques, comme le prouvent les déformations permanentes des carrosseries. Le choc qui perd le plus d'énergie cinétique est le choc parfaitement mou, dans lequel les deux objets restent liés.

On voit qu'entre le choc élastique, où l'énergie cinétique est conservée, et le choc parfaitement inélastique, où les deux objets restent collés, il y a toute une gamme de chocs inélastiques, correspondant à une perte plus ou moins grande d'énergie cinétique.

Si les deux mobiles constituent un système isolé (c'est-à-dire ne subissent aucune force de la part d'agents extérieurs) la quantité de mouvement se conserve.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'. \qquad (1)$$

Si, en outre, le choc est élastique, l'énergie cinétique se conserve.

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2. \qquad (2)$$

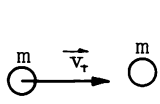
Les masses et les vitesses initiales étant supposées connues, les équations (1) et (2) permettent-elles de déterminer les vitesses finales ? Il y a six inconnues: les trois composantes de $\vec{v}_1'$ et celles de $\vec{v}_2'$. L'équation vectorielle (1) est équivalente à trois équations scalaires, qu'on peut déduire par projection sur les axes. Les équations (1) et (2) sont donc équivalentes à quatre équations scalaires. Comme il y a six inconnues, le problème est indéterminé. Cela se comprend, car l'état final du système dépend du point où les deux corps se touchent.

Dans les paragraphes suivants, nous examinerons divers cas particuliers de chocs élastiques.

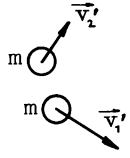
§ 102 Choc élastique de deux objets de même masse

Considérons deux objets de masse commune m. Supposons que l'un d'eux soit immobile et que l'autre arrive sur lui à une vitesse $\vec{v}_1$. Soient $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ les vitesses finales de ces objets. Si

le système est isolé et si le choc est élastique, les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie prennent la forme:



Etat initial



Etat final

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_1'^2 + \tfrac{1}{2}mv_2'^2$$

ou $$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \qquad (1)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \qquad (2)$$

Elevons au carré (carré scalaire) les deux membres de l'équation (1).

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2\vec{v}_1'\vec{v}_2' + v_2'^2.$$

En comparant cette relation avec l'équation (2), on obtient:

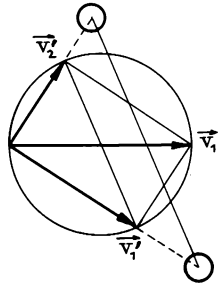
$$\vec{v}_1'\vec{v}_2' = 0.$$

Il y a donc trois possibilités:

a) $\vec{v}_1' = \vec{0}$.
L'équation (1) entraîne alors: $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$.
L'objet incident est immobilisé à l'endroit du choc et l'objet heurté part avec la vitesse initiale du premier. C'est le choc caractéristique avec "échange de vitesse" (§ 33).

b) $\vec{v}_2' = \vec{0}$.
L'équation (1) entraîne: $\vec{v}_1' = \vec{v}_1$.
C'est le cas trivial où l'un des objets passe à côté de l'autre, sans qu'il y ait choc. Il est évident que cette situation conserve la quantité de mouvement et l'énergie. Les équations (1) et (2) devaient donc fournir cette solution aussi.

c) $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ sont perpendiculaires.

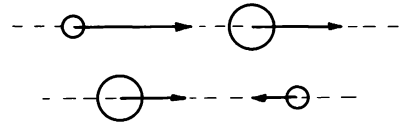


Cette possibilité comprend en fait une infinité de couples $(\vec{v}_1'; \vec{v}_2')$ possibles. Les vitesses finales sont perpendiculaires et leur somme est égale à la vitesse de l'objet incident. Le lieu des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit étant une sphère (généralisation du cercle de Thalès), on voit que les extrémités des vecteurs vitesses finales sont situées sur une sphère ayant $\vec{v}_1$ pour diamètre. Les distances parcourues par les mobiles depuis le point de choc étant proportionnelles à

leurs vitesses (mouvement rectiligne uniforme), le segment qui joint les mobiles est à tout instant parallèle au segment reliant les extrémités des vitesses finales, rapportées au point de choc.

En accord avec la remarque générale faite au paragraphe précédent, on voit que les équations de conservation ne déterminent pas univoquement l'état final. L'état initial contient une indétermination: c'est la position de l'objet heurté relativement au support de la vitesse de l'objet incident. C'est pour cette raison que l'état final est aussi indéterminé. La seule chose qu'on puisse affirmer d'avance, c'est que les vitesses finales seront perpendiculaires, ou éventuellement que l'une d'elles sera nulle.

§ 103* Choc central et élastique



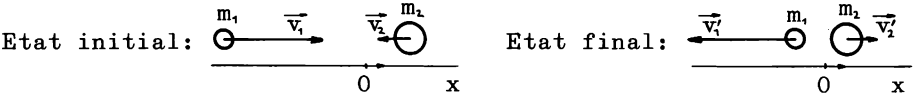
Le choc de deux particules assimilables à des points est dit central lorsque celles-ci se meuvent sur la même droite, avant et après le choc. Deux billes dont les centres se meuvent sur une même droite effectuent un choc central (si elles se rencontrent). Il en est de même de deux objets quelconques guidés par des rails et ne pouvant en sortir.

Un choc central peut être élastique, mou, ou même parfaitement mou. Si les particules constituent un système isolé et que le choc est élastique, on peut utiliser les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \qquad (1)$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (2)$$

Si de plus le choc est central, tous les vecteurs vitesse appartiennent à un espace à une dimension.



Supposons connues les masses et les vitesses initiales. Les relations (1) et (2) fournissent alors deux équations pour calculer les deux composantes v_{1x}' et v_{2x}' des vitesses finales, et le problème n'est plus indéterminé (cf § 101 et 102). Ces

équations sont:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \qquad (1')$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2x}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v'^2_{1x} + \tfrac{1}{2}m_2 v'^2_{2x} \qquad (2')$$

Le système peut être résolu par substitution. On tire v'_{2x} de (1') et on introduit sa valeur dans (2'). On obtient une équation du second degré en v'_{1x} qu'il suffit de résoudre. En fait, les calculs sont assez laborieux.

Nous allons suivre un autre chemin. Nous voulons résoudre le système constitué par les équations vectorielles (1) et (2), et garder la symétrie relativement aux deux mobiles. Elevons la première équation au carré (carré scalaire) et multiplions la seconde par $2(m_1 + m_2)$.

$$m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 \vec{v_1}\,\vec{v_2} + m_2^2 v_2^2 = m_1^2 v_1'^2 + 2m_1 m_2 \vec{v_1'}\,\vec{v_2'} + m_2^2 v_2'^2$$

$$m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_1 m_2 v_2'^2 + m_1 m_2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2$$

Soustrayons ces équations membre à membre.

$$m_1 m_2 (v_2^2 - 2\vec{v_1}\,\vec{v_2} + v_1^2) = m_1 m_2 (v_2'^2 - 2\vec{v_1'}\,\vec{v_2'} + v_1'^2)$$

$$(\vec{v_2} - \vec{v_1})^2 = (\vec{v_2'} - \vec{v_1'})^2 . \qquad (3)$$

Cette égalité signifie que les vecteurs $\vec{v_2} - \vec{v_1}$ (différence des vitesses initiales) et $\vec{v_2'} - \vec{v_1'}$ (différence des vitesses finales) ont la même norme. Ce résultat assez remarquable est valable pour tous les chocs élastiques, centraux ou non.

Utilisons maintenant l'hypothèse d'un choc central. Toutes les vitesses sont sur une même droite. Il reste alors deux possibilités: les vecteurs $\vec{v_2} - \vec{v_1}$ et $\vec{v_2'} - \vec{v_1'}$ sont égaux ou opposés.

Le cas où $$\vec{v_2'} - \vec{v_1'} = \vec{v_2} - \vec{v_1} \qquad (3a)$$

c'est-à-dire où la différence de vitesse n'est pas modifiée, correspond au cas où le choc n'a pas lieu. Pour s'en convaincre, le lecteur n'a qu'à résoudre le système composé des équations (3a) et (1). Il trouvera $\vec{v_1'} = \vec{v_1}$ et $\vec{v_2'} = \vec{v_2}$.

L'autre cas, celui où

$$\vec{v_2'} - \vec{v_1'} = -(\vec{v_2} - \vec{v_1}), \qquad (3b)$$

correspond au choc effectif. Le système composé des équations (3b) et (1) fournit:

$$\vec{v_2'} = \vec{v_1'} - \vec{v_2} + \vec{v_1} \qquad (3b')$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2(\vec{v_1'} - \vec{v_2} + \vec{v_1})$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + m_2\vec{v_2} - m_2\vec{v_1} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_1'}$$

On en déduit:

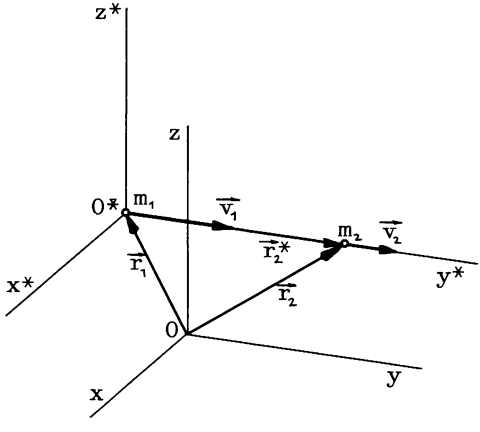
$$\boxed{\vec{v_1'} = \frac{2m_2\vec{v_2} + (m_1 - m_2)\vec{v_1}}{m_1 + m_2}} \qquad (4)$$

En introduisant cette valeur de $\vec{v_1'}$ dans l'égalité (3b') on obtient la valeur de $\vec{v_2'}$.

$$\boxed{\vec{v_2'} = \frac{2m_1\vec{v_1} + (m_2 - m_1)\vec{v_2}}{m_1 + m_2}} \qquad (5)$$

Comme on pouvait s'y attendre, ces formules sont symétriques relativement aux deux mobiles.

La relation (3b) exprime que les différences de vitesse des deux particules, avant et après le choc, sont opposées. Or ces différences de vitesse peuvent être interprétées comme des vitesses relatives. Soit Oxyz le référentiel par rapport auquel sont mesurées les vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. Envisageons un second référentiel $O^*x^*y^*z^*$ ayant la première particule pour origine. Le vecteur position de la seconde particule, dans ce référentiel, est:



$$\vec{r_2^*} = \vec{r_2} - \vec{r_1}.$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient:

$$\vec{v_2^*} = \vec{v_2} - \vec{v_1}.$$

$\vec{v_2^*}$ est la vitesse de la seconde particule, vue depuis le référentiel lié à la première. En raccourci, on dit que c'est la vitesse de la seconde particule relativement à la première, ou la vitesse relative des deux particules. La relation (3b) peut alors s'énoncer sous la forme d'une règle fort utile:

Dans un choc central et élastique, la vitesse relative des particules après la collision est l'opposé de ce qu'elle était avant.

De façon analogue, la relation (3), qui concerne n'importe quel choc élastique, peut s'interpréter en disant que tout choc élastique conserve la norme de la vitesse relative des deux mobiles. Par exemple, si un mobile "voit" un second mobile arriver contre lui à une vitesse de 2 m/s et effectuer une collision élastique, il le voit ensuite s'éloigner de lui à une vitesse de 2 m/s, quelles que soient les masses et les directions des vitesses.

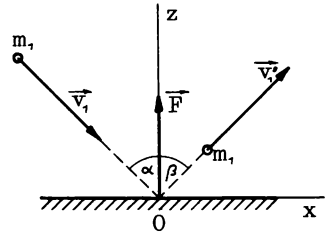
Si les masses sont égales, les formules encadrées donnent immédiatement:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_2' = \vec{v}_1 .$$

Le choc central et élastique de deux objets de même masse donne donc toujours lieu à un "échange de vitesse". Nous l'avions déjà remarqué dans le cas particulier où l'un des deux objets est initialement immobile (§§ 33 et 102).

§ 104* Réflexion contre une paroi

Etudions le choc élastique d'une particule contre une paroi plane. Supposons que la paroi n'exerce sur la particule qu'une force normale $\vec{F}$, ce qui revient à admettre qu'il n'y a pas de frottement. Soient m_1 la masse de la particule, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_1'$ ses vitesses initiale et finale. La paroi appartient à un objet dont la masse m_2 est beaucoup plus grande que m_1. Un référentiel Oxyz, supposé d'inertie, est lié à la paroi avant le choc. Oz lui est perpendiculaire, Ox et Oy lui sont parallèles. Les axes sont placés de façon que la vitesse initiale de la particule soit dans le plan Oxz. Après le choc, la paroi a une vitesse $\vec{v}_2'$ (vraisemblablement minime). Le système étant isolé et le choc élastique, on peut utiliser les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

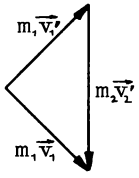


$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \qquad (1)$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (2)$$

La vitesse $\vec{v}_2'$ acquise par la paroi peut-elle être négligée ?

Si on écrit l'équation (1) sans le dernier terme, on commet manifestement une erreur, car les vecteurs $m_1\vec{v_1}$ et $m_1\vec{v_1'}$ ne sont pas égaux. La quantité de mouvement reçue par la paroi durant le choc n'est donc nullement négligeable. Cela s'explique par le fait que le produit $m_2\vec{v_2'}$ comprend un facteur très grand et un facteur très petit.



Tirons $\vec{v_2'}$ de l'équation (1), et introduisons sa valeur dans l'équation (2).

$$\vec{v_2'} = \frac{m_1}{m_2}(\vec{v_1} - \vec{v_1'})$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}(\vec{v_1} - \vec{v_1'})^2$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \tfrac{1}{2}m_1 (\vec{v_1} - \vec{v_1'})^2 \qquad (3)$$

Or la masse m_2 est beaucoup plus grande que la masse m_1. Le facteur m_1/m_2 est voisin de zéro. De ce fait, le dernier terme de l'équation (3) est négligeable devant les autres termes. On en déduit:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 \qquad \text{et} \qquad v_1 = v_1' .$$

La paroi ne reçoit donc pas d'énergie lors du choc. Cela s'explique par le fait que le produit $\frac{1}{2}m_2 v_2'^2$ comprend, à part $\frac{1}{2}$, un facteur très grand et deux facteurs très petits. On voit donc que la vitesse finale de la paroi peut être négligée dans l'équation (2) mais non dans l'équation (1).

Nous venons d'établir que le choc modifie la direction de la vitesse de la particule, mais ne change pas la norme de cette vitesse.

Désignons par $\vec{v}$ la vitesse de la particule. $\vec{v}$ est une fonction du temps, qui passe de la valeur initiale $\vec{v_1}$ à la valeur finale $\vec{v_1'}$. L'équation de Newton s'écrit

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v})$$

où $\vec{F}$ est la force (aussi fonction du temps) exercée par la paroi sur la particule. Cette équation est équivalente au système des trois équations suivantes:

$$F_x = \frac{d}{dt}(m_1 v_x) \qquad F_y = \frac{d}{dt}(m_1 v_y) \qquad F_z = \frac{d}{dt}(m_1 v_z)$$

Or $\quad F_x = 0 \quad$ et $\quad F_y = 0.$

On en déduit que v_x et v_y sont constants. La composante de $\vec{v}$ suivant Oy est nulle avant le choc. Elle est donc aussi nulle après. La particule reste dans le plan défini par sa trajectoire incidente et la normale à la paroi. D'autre part, puisque la composante de $\vec{v}$ suivant Ox est constante, on peut écrire:

$$v_1 \sin\alpha = v_1' \sin\beta.$$

Comme $v_1 = v_1'$, on obtient:

$$\alpha = \beta.$$

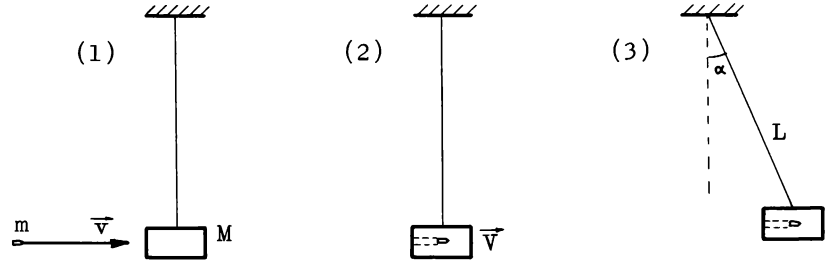
On constate que la particule se "réfléchit" sur la paroi comme le ferait un rayon lumineux. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

§ 105 Exemples de calcul

On trouve déjà quelques exemples de chocs au paragraphe 36.

Exemple 1: Pendule balistique. Pour déterminer la vitesse v d'une balle de fusil, de masse m, on tire horizontalement dans une pièce de bois de masse M, suspendue à un fil de longueur L et immobile. La balle s'immobilise dans le bois. Sous l'influence du choc, le pendule s'écarte de sa position initiale d'un angle α, puis oscille. Trouver l'expression de la vitesse de la balle.

$\Delta\Delta\Delta$ Considérons le système dans trois situations caractéristiques: (1) juste avant le choc, (2) juste après le choc, (3) lors de sa déviation maximale.



Quand le système "balle-bloc de bois" passe de l'état (1) à l'état (2), la quantité de mouvement est conservée car, pendant la collision, les forces extérieures ont une résultante

négligeable. Par contre, l'énergie mécanique ne se conserve pas puisque le choc est inélastique. On peut donc écrire, en désignant par $\vec{V}$ la vitesse du bloc de bois juste après le choc:

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V} \qquad \text{d'où:} \qquad v = \frac{m + M}{m} V.$$

Quand le système passe de l'état (2) à l'état (3), les forces extérieures ont une résultante différente de zéro et le système ne peut plus être considéré comme isolé. La quantité de mouvement ne se conserve donc pas. En revanche, si les frottements sont négligeables, le système ne subit que des forces conservatives et l'énergie mécanique se conserve. En choisissant la position du mobile dans l'état (2) comme point de référence de l'énergie potentielle, on peut écrire:

$$E_c(2) + E_p(2) = E_c(3) + E_p(3)$$

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 + 0 = 0 + (m + M)gL(1 - \cos\alpha)$$

On en déduit successivement:

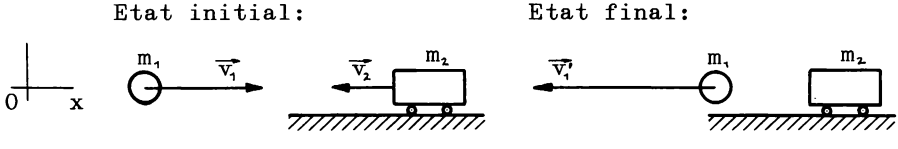
$$V = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} \qquad \text{et}$$

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)}.$$

Exemple 2: Un wagonnet de 500 g roule à une vitesse de 2 m/s. On veut l'arrêter en lançant contre lui une boule de 100 g. A quelle vitesse faut-il lancer celle-ci ? Envisager les deux cas suivants:
a) La boule est une balle élastique.
b) La boule est de pâte et reste collée au wagonnet.

△△△ a) Choc élastique

Utilisons le moyen le plus simple, qui consiste à réaliser un choc central.



Le système peut être considéré comme isolé et le choc est supposé élastique. La quantité de mouvement et l'énergie cinéti-

que se conservent.

$$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m_1 \vec{v_1}' \qquad (1)$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 \qquad (2)$$

Pour simplifier les équations, utilisons le fait que $m_2 = 5m_1$. Remplaçons partout m_2 par $5m_1$ puis simplifions par m_1.

$$\vec{v_1} + 5\vec{v_2} = \vec{v_1}' \qquad (3)$$

$$v_1^2 + 5v_2^2 = v_1'^2 \qquad (4)$$

Projetons les vecteurs sur un axe parallèle à $\vec{v_1}$ et de même sens. Comme le sens de tous les vecteurs est connu, nous pouvons exprimer les composantes des vecteurs en fonction des normes. L'équation (3) devient:

$$v_1 - 5v_2 = -v_1' \qquad (5)$$

Les équations (4) et (5) permettent de calculer les deux inconnues v_1 et v_1'.

$$v_1^2 + 5v_2^2 = (v_1 - 5v_2)^2$$

$$v_1^2 + 5v_2^2 = v_1^2 - 10v_1 v_2 + 25v_2^2$$

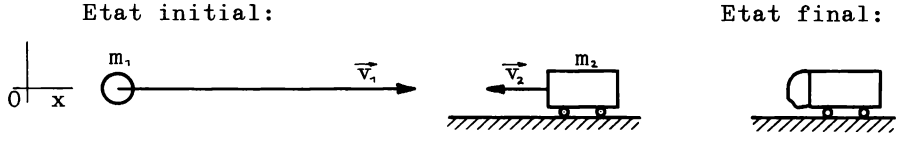
$$10v_1 v_2 = 20v_2^2$$

$$v_1 = 2v_2 = 4 \text{ m/s}.$$

$$v_1' = 5v_2 - v_1 = 3v_2 = 6 \text{ m/s}.$$

On conclut que la balle élastique doit être lancée à une vitesse de 4 m/s. (Elle rebondira à une vitesse de 6 m/s.)

b) Choc parfaitement mou



Dans ce cas, il y a une perte d'énergie cinétique. Mais, comme le système peut encore être considéré comme isolé, la quantité de mouvement est conservée. On a:

$$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = \vec{0}$$

Par projection des vecteurs sur un axe, on déduit:

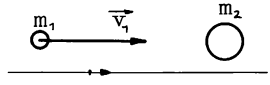
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

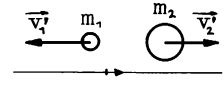
et $$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} = \frac{500\ g.2\ ms^{-1}}{100\ g} = 10\ m/s.$$

La boule de pâte doit être lancée à une vitesse de 10 m/s. La comparaison des résultats (a) et (b) est instructive.

Exemple 3*: Etudier le choc central et élastique d'une particule en mouvement contre une particule immobile. Examiner le résultat du choc en fonction des grandeurs relatives des deux masses.

ΔΔΔ

Etat initial: 

Etat final: 

Dans les formules établies au paragraphe 103 (formules encadrées) posons $\vec{v_2} = \vec{0}$. Les vitesses finales sont alors:

$$\vec{v_1'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v_1} \qquad \text{et} \qquad \vec{v_2'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v_1}$$

On peut envisager les cas suivants:

a) $m_1 \ll m_2$. On a: $\vec{v_1'} \cong -\vec{v_1}$ et $\vec{v_2'} \cong \vec{0}$.

Si l'objet incident a une masse beaucoup plus petite que l'objet immobile, il rebondit en arrière à une vitesse de même grandeur. L'objet heurté reste pratiquement immobile.

b) $m_1 < m_2$.

$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ est négatif et $\frac{2m_1}{m_1 + m_2}$ est inférieur à 1.

Si l'objet incident a une masse moindre que l'objet immobile, il revient en arrière et l'objet heurté part en avant à une vitesse inférieure à celle de l'objet incident.

c) $m_1 = m_2$. On a: $\vec{v_1'} = \vec{0}$ et $\vec{v_2'} = \vec{v_1}$

Si les masses sont égales, il y a échange de vitesses.

d) $m_1 > m_2$.

$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ est positif et $\frac{2m_1}{m_1 + m_2}$ est supérieur à 1.

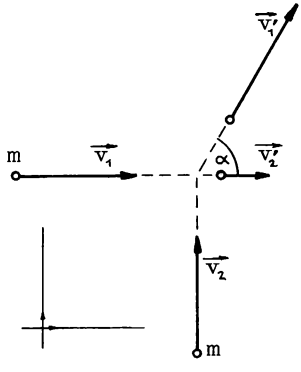
Si l'objet incident a une masse plus grande que l'objet heurté, il continue sa route à une vitesse moindre et l'objet qui était immobile acquiert une vitesse supérieure à celle de l'objet incident.

e) $m_1 \gg m_2$. On a: $\vec{v_1'} \cong \vec{v_1}$ et $\vec{v_2'} \cong 2\vec{v_1}$

Si l'objet incident a une masse beaucoup plus grande que l'objet heurté, sa vitesse n'est guère perturbée. En revanche, l'autre objet est expulsé à une vitesse double de celle de l'objet incident.

Exemple 4*: Deux objets ayant une masse commune de 1 kg sont lancés perpendiculairement l'un contre l'autre. Leurs vitesses ont la même grandeur, 2 m/s. L'un des objets subit une déviation de 90° et l'autre, une déviation de 60°. Calculer la grandeur des vitesses finales et indiquer comment évolue l'énergie du système.

△△△ Les symboles utilisés sont définis par la figure. On a un système isolé et la quantité de mouvement se conserve.



$$m\vec{v_1} + m\vec{v_2} = m\vec{v_1'} + m\vec{v_2'}$$

En projetant les vecteurs sur les axes et en simplifiant par m, on a:

$$v_1 = v_1' \cos\alpha + v_2'$$

$$v_2 = v_1' \sin\alpha$$

Désignons par v la grandeur commune des vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

$$v = v_1' \cos\alpha + v_2'$$

$$v = v_1' \sin\alpha$$

De ce système, on déduit les inconnues v_1' et v_2'.

$$v_1' = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{2\ ms^{-1}}{0{,}866} = 2{,}31\ \frac{m}{s}.$$

$$v_2' = v - v_1' \cos\alpha = v - \frac{v\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\ \frac{m}{s}.(1 - 0{,}577) = 0{,}845\ \frac{m}{s}.$$

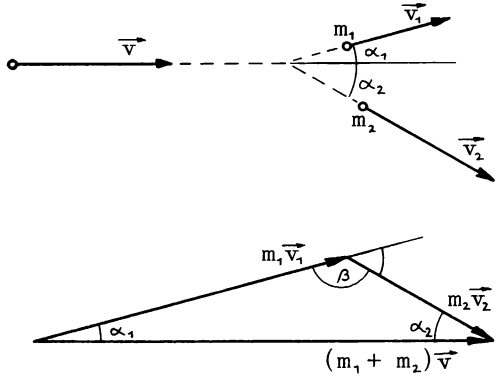
L'énergie perdue dans le choc vaut:

$$E = \tfrac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 - v_1'^2 - v_2'^2) = \tfrac{1}{2}.1\ \text{kg}(4 + 4 - 5{,}34 - 0{,}71)\frac{m^2}{s^2} = 0{,}98\ \text{J}.$$

Il s'agit donc d'un choc mou.

Exemple 5*: Une particule se déplace à une vitesse $\vec{v}$. Soudain elle éclate et se fractionne en deux morceaux de masses m_1 et m_2. Ceux-ci sont éjectés dans des directions formant des angles α_1 et α_2 avec la vitesse initiale $\vec{v}$. Calculer la grandeur des vitesses finales des fragments.

△△△ Désignons par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ les vitesses finales. La particule ou ses fragments constituent un système isolé. La quantité de mouvement se conserve.



$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$$

Cette équation s'interprète géométriquement par un triangle. Dans celui-ci, appliquons le théorème du sinus, en remarquant que

$$\sin\beta = \sin(\pi - \beta)$$
$$= \sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

$$\frac{m_1 v_1}{\sin\alpha_2} = \frac{(m_1 + m_2)v}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \qquad \frac{m_2 v_2}{\sin\alpha_1} = \frac{(m_1 + m_2)v}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Les vitesses finales ont pour grandeur:

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)v\ \sin\alpha_2}{m_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \qquad v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v\ \sin\alpha_1}{m_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

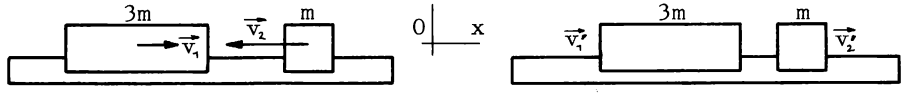
On peut remarquer que si on fait une inversion du temps, la situation physique considérée ici devient un choc parfaitement mou.

Exemple 6*: Sur un rail à coussin d'air, un glisseur de 600 g est lancé à une vitesse de 1 m/s. Il heurte de façon élastique un second glisseur dont la masse est de 200 g et qui vient en sens inverse à une vitesse de 2 m/s. Calculer les vitesses après le choc.

△△△ Le choc est évidemment central. Désignons la plus petite

masse par m, et l'autre par 3m.

Etat initial: Etat final:



L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$3m\vec{v_1} + m\vec{v_2} = 3m\vec{v_1}' + m\vec{v_2}'$$

ou
$$3\vec{v_1} + \vec{v_2} = 3\vec{v_1}' + \vec{v_2}' \qquad (1)$$

Pour n'avoir que des équations linéaires, nous pouvons utiliser le théorème selon lequel, dans tout choc central et élastique, les vitesses relatives, avant et après le choc, sont opposées.

$$\vec{v_2} - \vec{v_1} = -(\vec{v_2}' - \vec{v_1}') \qquad (2)$$

Il ne reste qu'à résoudre le système composé des équations (1) et (2). En les additionnant membre à membre, on trouve:

$$2\vec{v_1} + 2\vec{v_2} = 4\vec{v_1}' \qquad \text{d'où} \qquad \vec{v_1}' = \tfrac{1}{2}\vec{v_1} + \tfrac{1}{2}\vec{v_2} \qquad (3)$$

L'équation (2) fournit alors:

$$\vec{v_2}' = \vec{v_1}' + \vec{v_1} - \vec{v_2} = \tfrac{1}{2}\vec{v_1} + \tfrac{1}{2}\vec{v_2} + \vec{v_1} - \vec{v_2} = \tfrac{3}{2}\vec{v_1} - \tfrac{1}{2}\vec{v_2} \qquad (4)$$

Projetons toutes les vitesses sur un axe. Les équations (3) et (4) entraînent:

$$v_{1x}' = \tfrac{1}{2}v_{1x} + \tfrac{1}{2}v_{2x} = \tfrac{1}{2}.1\ \frac{m}{s} + \tfrac{1}{2}(-2\ \frac{m}{s}) = -0,5\ \frac{m}{s}.$$

$$v_{2x}' = \tfrac{3}{2}v_{1x} - \tfrac{1}{2}v_{2x} = \tfrac{3}{2}.1\ \frac{m}{s} - \tfrac{1}{2}(-2\ \frac{m}{s}) = 2,5\ \frac{m}{s}.$$

Les vitesses finales des glisseurs ont des grandeurs de 0,5 m/s et de 2,5 m/s. Leur sens a été inversé par le choc.

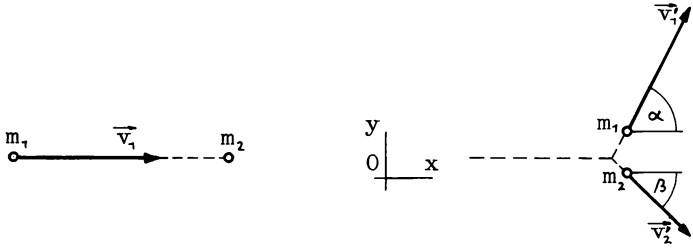
Exemple 7*: Un ballon se déplaçant à 60 km/h effectue un choc central et élastique contre un camion roulant à 50 km/h. Calculer la vitesse finale du ballon, en envisageant les deux cas possibles.

ΔΔΔ Le choc n'a pratiquement pas d'influence sur la vitesse du camion, qui reste égale à 50 km/h.
a) Si le ballon arrive par devant, la vitesse relative avant

le choc vaut 110 km/h. Comme elle doit avoir la même grandeur après le choc, le ballon est expulsé à une vitesse de 160 km/h.
b) Si le ballon arrive par derrière, la vitesse relative est de 10 km/h. Le ballon poursuit donc sa route dans le même sens, à une vitesse de 40 km/h.

Exemple 8*: Un proton est lancé à une vitesse de 4000 km/s contre une cible. Il subit une collision contre une particule inconnue. Sa vitesse est déviée de 63^0 et s'abaisse à 3000 km/s. Déterminer la masse de la particule inconnue, de même que la grandeur et la direction de la vitesse qu'elle a juste après le choc.

ΔΔΔ On suppose que la particule heurtée était initialement immobile, que les deux particules constituent un système isolé et que le choc est élastique.



Les équations de conservation s'écrivent:

$$m_1 \vec{v_1} = m_1 \vec{v_1'} + m_2 \vec{v_2'}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

En projetant les vecteurs sur des axes et en simplifiant, on obtient trois équations qui permettent de déterminer les trois inconnues m_2, v_2' et β.

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta \qquad (1)$$

$$0 = m_1 v_1' \sin\alpha - m_2 v_2' \sin\beta \qquad (2)$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \qquad (3)$$

Pour simplifier un peu l'écriture, exprimons la masse de la particule inconnue à l'aide de celle du proton.

$$m_2 = k m_1 \qquad \text{où k est un nombre pur.}$$

Les équations ci-dessus deviennent, après simplification par m_1 :

$$v_1 = v_1' \cos\alpha + k v_2' \cos\beta \qquad (4)$$

$$0 = v_1' \sin\alpha - k v_2' \sin\beta \qquad (5)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + k v_2'^2 \qquad (6)$$

Les équations (4) et (5) permettent le calcul de β.

$$\left.\begin{aligned} k v_2' \sin\beta &= v_1' \sin\alpha \\ k v_2' \cos\beta &= v_1 - v_1' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_1' \sin\alpha}{v_1 - v_1' \cos\alpha}.$$

En élevant au carré les deux équations ci-dessus et en les additionnant, on peut calculer le produit $k^2 v_2'^2$, utile pour la suite.

$$k^2 v_2'^2 (\sin^2\beta + \cos^2\beta) = v_1'^2 \sin^2\alpha + v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2 \cos^2\alpha$$

$$k^2 v_2'^2 = v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2 \qquad (7)$$

L'équation (6) s'écrit aussi:

$$k v_2'^2 = v_1^2 - v_1'^2 \qquad (8)$$

En divisant ces deux dernières équations membre à membre, on trouve:

$$k = \frac{v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2}{v_1^2 - v_1'^2}$$

La masse de la particule inconnue vaut donc:

$$m_2 = k m_1 = \frac{v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2}{v_1^2 - v_1'^2} m_1$$

De la relation (8), on peut tirer v_2', puisque k est connu.

$$v_2'^2 = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{k} = \frac{(v_1^2 - v_1'^2)^2}{v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2}$$

La vitesse de la particule inconnue a donc pour grandeur:

$$v_2' = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{\sqrt{v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2}}$$

Pour le calcul numérique, exprimons toutes les vitesses dans l'unité 10^6 m/s. On a:

$$k = \frac{4^2 - 2.4.3.\cos 63^\circ + 3^2}{4^2 - 3^2} = 2{,}01 \simeq 2$$

La particule inconnue a une masse double de celle du proton. Ce pourrait bien être un deuton.

$$tg\beta = \frac{3.\sin 63^o}{4 - 3.\cos 63^o} = 1,01. \qquad \beta = 45,4^o$$

$$v'_z = \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 - 2.4.3.\cos 63^o + 3^2}} = 1,86$$

La vitesse finale du deuton est de $1,86.10^6$ m/s et forme un angle de $45,4^o$ avec la direction du proton incident.

$\vec{J}$

Chapitre 18

IMPULSION

§ 106 Impulsion et variation de la quantité de mouvement

Aux chapitres 14 et 15, nous avons appris que l'effet d'une force peut être mis en relation avec le trajet parcouru par son point d'application. Parallèlement, ce chapitre va nous montrer que l'effet d'une force dépend du temps pendant lequel elle s'exerce.

Considérons d'abord une force constante $\vec{F}$ s'exerçant sur un mobile pendant un temps t. On définit l'impulsion de cette force pendant ce temps par le produit de $\vec{F}$ et de t. L'impulsion étant désignée par $\vec{J}$, on a:

$$\vec{J} = \vec{F}t.$$

C'est une grandeur vectorielle. Elle se mesure en Ns ou $kgms^{-1}$.

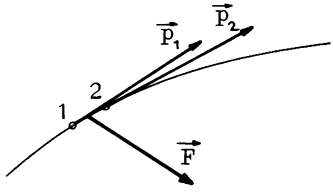
Si on a une force qui varie, on décompose son temps d'action en intervalles suffisamment petits pour qu'au cours de chacun d'eux la force soit pratiquement constante. On peut alors calculer les impulsions élémentaires, c'est-à-dire les impulsions de la force pendant ces petits intervalles de temps. L'impulsion pendant le temps considéré est alors la somme des impulsions élémentaires. Désignons par Δt_i, i variant de 1 à n, les petits intervalles de temps et par $\vec{F}_i$ la valeur moyenne de la force sur chacun d'eux. L'impulsion totale est définie par la relation:

$$\vec{J} = \sum \vec{F}_i \Delta t_i .$$

Pour une définition plus rigoureuse, il faut faire tendre tous les intervalles de temps vers zéro, et prendre la limite de cette somme. On note alors:

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt.$$

Considérons un point matériel se déplaçant sous l'influence de certaines forces. Soit $\vec{F}$ leur résultante. Sur la trajectoire, envisageons deux points 1 et 2, suffisamment proches pour que $\vec{F}$ ne varie pas de façon sensible sur le tronçon qu'ils délimitent. Désignons par $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ les valeurs de la quantité de mouvement du mobile en ces deux points et par Δt le temps qu'il met pour passer de l'un à l'autre. L'impulsion de $\vec{F}$ sur ce tronçon est:

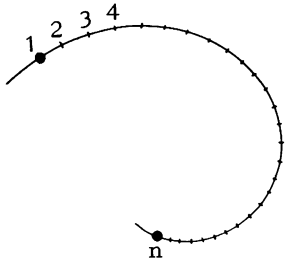


$$\overrightarrow{\Delta J_{12}} = \vec{F}.\Delta t.$$

D'après l'équation de Newton, $\vec{F}$ peut être remplacé par $\frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}$.

$$\overrightarrow{\Delta J_{12}} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}.\Delta t = \overrightarrow{\Delta p} = \vec{p_2} - \vec{p_1}.$$

Etendons ce résultat à une portion quelconque de trajectoire. Tout trajet peut être considéré comme la réunion de trajets élémentaires suffisamment petits pour qu'on puisse faire sur chacun d'eux le calcul ci-dessus. On a alors:



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Delta J_{12}} &= \vec{p_2} - \vec{p_1} \\
\overrightarrow{\Delta J_{23}} &= \vec{p_3} - \vec{p_2} \\
\overrightarrow{\Delta J_{34}} &= \vec{p_4} - \vec{p_3} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\overrightarrow{\Delta J_{n-1,n}} &= \vec{p_n} - \vec{p_{n-1}}
\end{aligned}$$

Additionnons toutes ces égalités membre à membre. A gauche, on trouve la somme de toutes les impulsions élémentaires exercées par $\vec{F}$. C'est donc l'impulsion de $\vec{F}$ sur le parcours considéré. A droite, tous les termes sauf deux s'annulent par réduction. On obtient:

$$\vec{J_{1n}} = \vec{p_n} - \vec{p_1}.$$

Nous énoncerons ce résultat sous la forme suivante:

Théorème de variation de la quantité de mouvement:
L'impulsion de la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel, sur une portion de sa trajectoire, est égale à son accroissement de quantité de mouvement.

En désignant par 1 et 2 deux points quelconques de la trajectoire, on peut donc écrire:

$$\vec{J}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 .$$

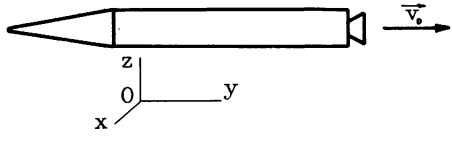
Le contenu de ce théorème est exactement le même que celui de l'équation de Newton. Il s'agit de deux formes mathématiques qui s'impliquent réciproquement.

On ne manquera pas de remarquer les analogies formelles qui existent entre les notions de travail et d'impulsion, d'une part, d'énergie cinétique et de quantité de mouvement, d'autre part. (Voir § 86.)

Le lecteur débutant aura peut-être avantage à étudier les exemples 1 et 2 du paragraphe 110 avant d'aborder les trois paragraphes suivants.

§ 107* Force de propulsion d'une fusée

Supposons qu'une fusée éjecte des gaz de masse volumique ρ, avec un débit D et une vitesse $\vec{v_0}$, vitesse mesurée par rapport à la fusée elle-même. Calculons la force de propulsion $\vec{F}$ exercée par les gaz sur la fusée, à une date t quelconque.



Choisissons un référentiel galiléen Oxyz dans lequel la fusée soit immobile à la date t. (La fusée ne reste évidemment pas constamment immobile dans ce référentiel puisqu'elle est accélérée.) Pendant un petit intervalle de temps Δt, la fusée éjecte un volume de gaz

$$\Delta V = D\Delta t$$

de masse

$$\Delta m = \rho D\Delta t.$$

Appliquons à cette masse le théorème de variation de la quantité de mouvement.

$$\overrightarrow{\Delta J_{12}} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 . \qquad (1)$$

L'état initial est celui où cette matière est encore dans la fusée, l'état final celui où elle vient d'en sortir. Sa variation de quantité de mouvement est donc:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \rho D \Delta t . \vec{v}_0 - \vec{0} = \rho D \Delta t . \vec{v}_0$$

Cette matière subit de la part de la fusée une force moyenne $\vec{F}'$ (dont la réaction est la force de propulsion), qui s'exerce pendant un temps Δt. L'impulsion de celle-ci est donc:

$$\overrightarrow{\Delta J_{12}} = \vec{F}' \Delta t = -\vec{F} \Delta t .$$

La relation (1) devient alors:

$$-\vec{F} \Delta t = \rho D \Delta t . \vec{v}_0$$

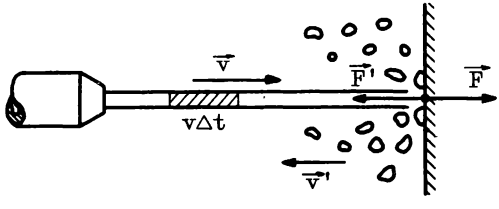
ou

$$\vec{F} = -\rho D \vec{v}_0 .$$

La force de propulsion de la fusée est donc égale, en grandeur, au produit du débit massique des gaz éjectés (ρD = masse éjectée par unité de temps) par la vitesse d'éjection. Cette force ne dépend ni de la masse ni de la vitesse de la fusée.

§ 108* Force exercée par un jet d'eau sur une paroi

Un jet d'eau de section S arrive perpendiculairement sur une paroi, à une vitesse $\vec{v}$. La façon dont il rejaillit dépend des circonstances. On peut toutefois admettre qu'en moyenne l'eau est rejetée en arrière avec une vitesse $\vec{v}'$ telle que



$$0 \leq v' \leq v.$$

Considérons le cylindre de liquide qui sort du tuyau d'amenée pendant un temps arbitraire Δt. Son volume et sa masse valent respectivement:

$$\Delta V = Sv\Delta t \qquad \text{et} \qquad \Delta m = \rho Sv\Delta t.$$

Il agit sur la paroi pendant le temps où il s'y écrase et ce temps est égal à Δt. La force $\vec{F}'$ qu'exerce la paroi sur lui agit pendant le même temps et fournit l'impulsion

$$\overrightarrow{\Delta J_{12}} = \vec{F}'\Delta t.$$

D'après le théorème de variation de la quantité de mouvement, cette impulsion est égale à la différence entre les quantités de mouvement finale et initiale de cette portion de liquide. On a donc:

$$\vec{F}'\Delta t = \rho S v \Delta t \vec{v}' - \rho S v \Delta t \vec{v}$$

ou

$$\vec{F}' = \rho S v (\vec{v}' - \vec{v}).$$

La force $\vec{F}$ exercée par le liquide sur la paroi est la réaction de $\vec{F}'$. Elle vaut

$$\vec{F} = \rho S v (\vec{v} - \vec{v}').$$

Dans le cas extrême où la vitesse finale est pratiquement nulle, on a:

$$\vec{F} = \rho S v \vec{v}.$$

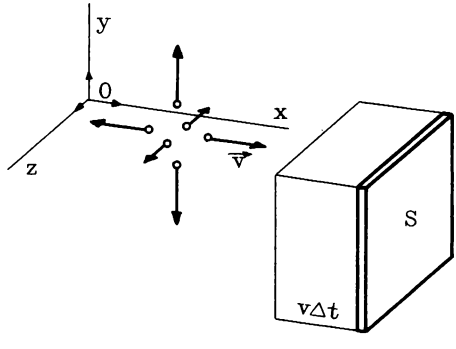
Dans l'autre cas extrême, où l'eau rejaillit à une vitesse $-\vec{v}$, on a:

$$\vec{F} = \rho S v (\vec{v} + \vec{v}) = 2\rho S v \vec{v}.$$

Suivant la façon dont l'eau se comporte après le choc, la force exercée sur la paroi varie donc du simple au double.

§ 109* Pression d'un gaz

D'une façon un peu simplifiée, mais conduisant à un résultat correct, nous allons calculer la pression résultant des chocs des molécules d'un gaz contre une paroi. Nous supposons que les vitesses des particules ont toutes la même grandeur v.



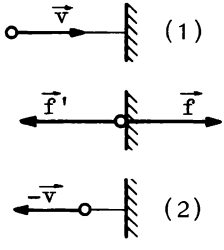
Pour contourner la difficulté résultant du fait que les vitesses peuvent avoir n'importe quelle direction, nous faisons comme si les seules directions possibles pour la vitesse étaient celles de trois axes orthogonaux (cela parce que l'espace a trois dimensions). Pour chaque direction, il y a deux sens possibles. Nous considérons donc qu'il n'y a que six vitesses possibles et nous supposons que les molécules

du gaz se partagent selon ces vitesses en six parties également nombreuses.

Etudions la force résultant des chocs sur une paroi d'étendue S, perpendiculaire à l'axe Ox. Seules des particules se mouvant parallèlement à cet axe, et dans un seul des deux sens, peuvent atteindre la paroi. Si le gaz contient N particules par unité de volume, il y en a N/6 qui entrent en ligne de compte dans le calcul de la pression sur la paroi. Les particules qui arrivent sur elle pendant un temps arbitraire Δt sont situées dans un prisme de base S et de hauteur $v\Delta t$. Leur nombre est:

$$\frac{N}{6}.Sv\Delta t.$$

Appliquons le théorème de variation de la quantité de mouvement à une particule qui heurte la paroi. La force "microscopique" (et variable) exercée par la particule sur la paroi est désignée par $\vec{f}$, et sa réaction par $\vec{f}'$. La masse de la particule est m. On a donc:



$$\int_1^2 \vec{f}'dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -m\vec{v} - m\vec{v} = -2m\vec{v}.$$

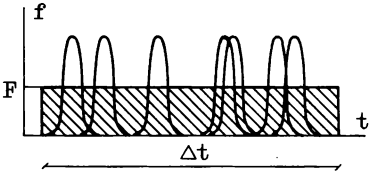
L'impulsion "microscopique" donnée par le choc d'une particule contre la paroi est:

$$\int_1^2 \vec{f}dt = -\int_1^2 \vec{f}'dt = 2m\vec{v}.$$

L'impulsion donnée pendant le temps Δt par toutes les particules qui ont heurté la paroi vaut

$$\frac{N}{6}.Sv\Delta t.2m\vec{v}.$$

Cette impulsion est équivalente à celle d'une force macroscopique constante $\vec{F}$ agissant sur la paroi pendant le temps Δt.



$$\vec{F}\Delta t = \frac{N}{6}.Sv\Delta t.2m\vec{v}.$$

La force exercée par le gaz sur la paroi a donc pour grandeur

$$F = \frac{1}{3}NSmv^2.$$

La pression du gaz vaut alors: $p = F/S$ ou

$$p = \frac{1}{3}Nmv^2.$$

N désignant le nombre de particules par unité de volume et m la masse d'une particule, le produit Nm représente la masse du gaz par unité de volume, autrement dit sa masse volumique ρ. La relation ci-dessus peut alors s'écrire:

$$p = \frac{1}{3}\rho v^2.$$

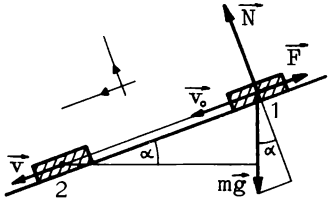
Cette formule permet, par exemple, de calculer la vitesse moyenne des molécules d'un gaz. Pour l'azote à la température de 0 °C et à la pression normale (1 atm ou $1{,}013.10^5\,Nm^{-2}$), la masse volumique vaut $1{,}251\ kgm^{-3}$. La vitesse moyenne des molécules d'azote dans ces conditions vaut ainsi:

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3.1{,}013.10^5\,Nm^{-2}}{1{,}251\ kgm^{-3}}} = 493\ \frac{m}{s}.$$

§ 110 Exemples de calcul

Exemple 1: Un objet de masse m est lancé à une vitesse $\vec{v_o}$ sur un plan d'inclinaison α, de façon qu'il descende le long d'une ligne de plus grande pente. Il subit une force de frottement $\vec{F}$. Calculer la grandeur de sa vitesse
a) après un parcours de durée t,
b) après un parcours de longueur L.

△△△ L'objet subit trois forces: son poids $m\vec{g}$, une force $\vec{N}$ normale au plan et une force de frottement $\vec{F}$. Soit $\vec{v}$ la vitesse cherchée.



a) Utilisons le théorème de variation de la quantité de mouvement. Comme toutes les forces sont constantes, l'impulsion se calcule aisément. On a successivement:

$$\vec{J}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

et
$$(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F})t = m\vec{v} - m\vec{v_o}$$

Par projection sur un axe parallèle à la piste, on a:

$$(mg\sin\alpha - F)t = mv - mv_o$$

La vitesse après un temps t a donc pour grandeur:

$$v = v_o + (g \sin\alpha - \frac{F}{m})t$$

b) Utilisons le théorème de variation de l'énergie cinétique.

$$A_{12} = E_c(2) - E_c(1)$$

$$mgL \sin\alpha - FL = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_o^2$$

La vitesse après un parcours de longueur L a pour grandeur:

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2L(g \sin\alpha - \frac{F}{m})}$$

Exemple 2: Un footballeur shoote un ballon de 500 g, immobile. Le ballon est expédié à une vitesse de 20 m/s. Calculer la force exercée par le pied du joueur sur le ballon et le temps d'action de cette force.

ΔΔΔ Supposons d'abord que le pied du joueur exerce sur le ballon une force constante $\vec{F}$ pendant un temps t. D'après le théorème de variation de la quantité de mouvement, on a:

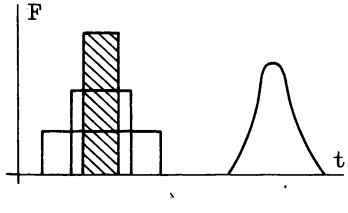
$$\vec{J}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\vec{F}t = m\vec{v} - \vec{0}$$

ou $$Ft = mv = 0{,}5 \text{ kg}.20 \frac{m}{s} = 10 \text{ kgms}^{-1}.$$

Le problème est indéterminé. Ni la force, ni son temps d'action ne peuvent être calculés. Seul leur produit est déterminé.

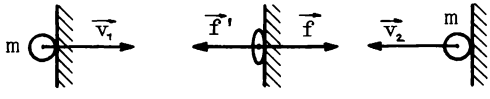
On remarque que l'effet du coup de pied sur le ballon ne peut pas être mis en relation exclusive avec la force exercée ou avec le temps d'action mais bien avec l'impulsion de cette force. On peut conjecturer que la force a valu 100 N et s'est exercée pendant 0,1 s ou qu'elle a valu 1000 N et s'est exercée pendant 0,01 s. Dans une représentation graphique de l'intensité de la force en fonction du temps, l'impulsion est la surface comprise entre la courbe et l'axe du temps. Les différentes possibilités correspondent à diverses courbes qui ont toutes en commun de délimiter avec l'axe du temps une surface de 10 Ns. Si, comme nous l'avons supposé, la force est constante, la surface est



un rectangle. Si la force est variable la courbe a une forme plus ou moins compliquée mais délimite toujours une surface de 10 Ns.

Exemple 3*: De petites balles élastiques ayant une masse de 20 g chacune sont lancées perpendiculairement contre une paroi, à une vitesse de 30 m/s. La paroi reçoit en moyenne 100 balles par seconde. Calculer la force moyenne qu'elle subit.

△△△ Soit m la masse d'une balle, $\vec{v_1}$ sa vitesse initiale, et $\vec{v_2}$ sa vitesse finale. Supposons que chaque balle exerce une force constante $\vec{f}$ contre la paroi, pendant une durée τ. Appliquons à une balle le théorème de variation de la quantité de mouvement, pendant la durée du contact. Ce théorème fait intervenir les forces qui s'exercent sur la balle. La seule qui ait de l'importance est $\vec{f}'$, la réaction de $\vec{f}$. On a donc:



$$\vec{J}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\vec{f}'\tau = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

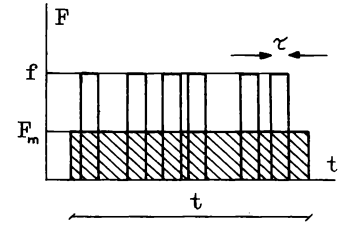
L'impulsion exercée par une balle sur la paroi vaut:

$$\vec{f}\tau = -\vec{f}'\tau = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_2$$

Si le choc est élastique, $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Cette impulsion est:

$$\vec{f}\tau = 2m\vec{v}_1$$

La force exercée individuellement par une balle ne peut être connue, car son temps d'action τ ne l'est pas. Seule l'impulsion de cette force est connue. Soit ν la fréquence des chocs sur la paroi. Pendant un temps arbitraire t, la paroi reçoit un nombre de balles égal à νt. L'impulsion totale due au choc de toutes ces balles est



$$\vec{J} = \nu t . 2m\vec{v}_1 .$$

Cette impulsion est équivalente à celle d'une force moyenne $\vec{F}_m$ agissant de façon continue pendant tout l'intervalle de temps t. Cette force moyenne est définie par la condition

$$\vec{F}_m t = \nu t . 2m\vec{v}_1 .$$

La force moyenne agissant sur la paroi est donc:

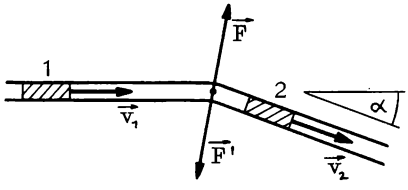
$$\vec{F}_m = 2m\vec{v}_1\nu$$

Sa grandeur est:

$$F_m = 2mv_1\nu = 2.0{,}02 \text{ kg}.30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.100 \text{ s}^{-1} = 120 \text{ N}.$$

Exemple 4*: Un liquide de masse volumique ρ circule à une vitesse de grandeur v dans un tuyau de section S. Le tuyau subit une déviation d'un angle α. Calculer la force exercée par le liquide sur le tuyau à l'endroit du coude.
Application numérique: $\rho = 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $v = 20 \text{ ms}^{-1}$, $S = 0{,}1 \text{ m}^2$, $\alpha = 20^o$.

$\Delta\Delta\Delta$ Pendant un intervalle de temps arbitraire Δt, il passe à travers une section du tuyau un volume



$$\Delta V = Sv\Delta t$$

et une masse

$$\Delta m = \rho Sv\Delta t.$$

Ce liquide met un temps Δt pour franchir le coude. Il y subit une force moyenne $\vec{F}'$ dont l'impulsion vaut

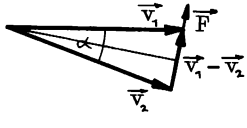
$$\vec{\Delta J}_{12} = \vec{F}'\Delta t.$$

Appliquons le théorème de variation de la quantité de mouvement à cette portion de liquide, lorsqu'elle effectue le trajet 1→2.

$$\vec{\Delta J}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad \text{devient} \qquad \vec{F}'\Delta t = \Delta m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

et

$$\vec{F}'\Delta t = \rho Sv\Delta t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$



La force exercée par le liquide sur le tuyau est la réaction de $\vec{F}'$. Elle vaut

$$\vec{F} = \rho Sv(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Elle est dirigée selon la bissectrice de l'angle formé par le tuyau, mais vers l'extérieur. Elle a pour grandeur:

$$F = \rho Sv.2v \sin\frac{\alpha}{2}.$$

c'est-à-dire

$$F = 2\rho Sv^2 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Numériquement, cette force vaut:

$$F = 2.10^3 \text{ kgm}^{-3}.0,1 \text{ m}^2.400 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}.\sin 10^o = 1,39.10^4 \text{ N}.$$

L'existence de cette force explique pourquoi les coudes des conduites d'alimentation des usines hydro-électriques sont ancrés par de gros blocs de béton.

Chapitre 19

MOMENT CINETIQUE

§ 111* Moment cinétique

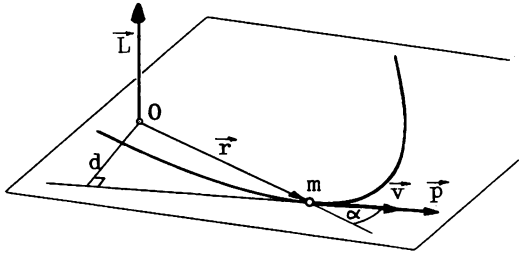
De même que nous avons introduit la notion de moment d'une force (§ 47), nous définissons maintenant le moment de la quantité de mouvement. On nomme celui-ci moment cinétique et on le désigne par $\vec{L}$.

Définition: Le moment cinétique d'une particule est le produit vectoriel de son vecteur position par sa quantité de mouvement.

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}.$$

Il se mesure en kgm^2s^{-1}.

$\vec{L}$ est évidemment relatif à l'origine O choisie. Sa norme est égale au produit des normes des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$ et du sinus de l'angle qu'ils forment.



$$L = rp \sin\alpha.$$

On peut remarquer que $r \sin\alpha$ est la distance de l'origine au support de la quantité de mouvement. (C'est le bras de levier dans le cas du moment d'une force.)

$$r \sin\alpha = d.$$

On a alors: $$L = pd.$$

La norme du moment cinétique est égale au produit de la norme de la quantité de mouvement par la distance de l'origine à

son support.

Voyons ce que nous obtenons en dérivant par rapport au temps les deux membres de l'égalité qui définit le moment cinétique.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

$d\vec{r}/dt$ est la vitesse du mobile. D'après l'équation de Newton, $d\vec{p}/dt$ est la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'exercent sur lui. La relation ci-dessus s'écrit donc:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F}.$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont parallèles, et leur produit nul. Par définition $\vec{r} \wedge \vec{F}$ est le moment de la résultante des forces. L'équation prend donc la forme

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.} \qquad (1)$$

Si la particule subit plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, le moment de leur résultante vaut

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n.$$

Il est égal à la somme des moments de ces forces. On l'appelle moment résultant. La formule (1) permet d'énoncer:

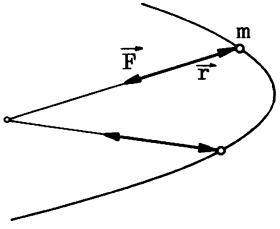
> Théorème du moment cinétique: La dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur lui.

L'analogie formelle entre ce théorème et l'équation de Newton est frappante. On passe de celle-ci à celui-là en remplaçant la quantité de mouvement et les forces par les moments de ces vecteurs.

§ 112* Mouvement central

Une force $\vec{F}$ est dite centrale si elle est constamment dirigée vers le même point O. Une telle force peut être attractive ou répulsive. C'est la situation qui se réalise, par exemple, lorsqu'un corps se déplace dans le champ de gravitation d'un astre, ou lorsqu'une particule chargée passe près d'un noyau.

Si un mobile subit une seule force et que celle-ci est centrale, il a un mouvement central.



Dans une telle situation, choisissons comme origine le point vers lequel est toujours dirigée la force. $\vec{r}$ et $\vec{F}$ étant parallèles, le moment de la force est nul.

$$\vec{M} = \vec{0}.$$

Le théorème du moment cinétique implique alors:

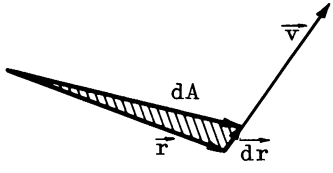
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad \vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Dans un mouvement central, le moment cinétique est un vecteur constant.

Cherchons à interpréter ce résultat. En premier lieu, on peut remarquer que le produit vectoriel $\vec{r} \wedge m\vec{v}$ a une direction fixe. Cela implique que les deux vecteurs $\vec{r}$ et $m\vec{v}$ appartiennent constamment à un plan perpendiculaire à cette direction. Donc la trajectoire du mobile est plane.

Le moment cinétique peut s'écrire:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m \frac{\vec{dr}}{dt}$$



où dt est un petit intervalle de temps arbitraire et $\vec{dr}$ le trajet effectué par le mobile pendant ce temps. La norme du produit $\vec{r} \wedge \vec{dr}$, selon une propriété connue du produit vectoriel (§ 46), représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{dr}$. L'aire balayée par le vecteur position pendant le temps dt vaut donc:

$$dA = \tfrac{1}{2} \left\| \vec{r} \wedge \vec{dr} \right\|.$$

On peut alors écrire:

$$L = \frac{m}{dt} \cdot \left\| \vec{r} \wedge \vec{dr} \right\| = 2m \cdot \frac{dA}{dt}.$$

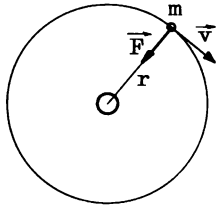
dA/dt représente l'aire balayée par $\vec{r}$ par unité de temps. On nomme cette grandeur vitesse aréolaire. Dans un mouvement central, le moment cinétique est constant. La vitesse aréolaire est donc aussi constante. Ce résultat est équivalent à la deu-

xième loi de Képler, selon laquelle le segment qui joint le soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux (§ 75).

§ 113* L'atome d'hydrogène - Modèle de Bohr

On sait aujourd'hui que le comportement d'une particule ne peut être correctement décrit qu'en relation avec celui d'une onde. L'intensité de cette onde, en chaque point et à chaque instant, renseigne sur la probabilité qu'on a de trouver la particule. La notion classique de point matériel, bien défini dans l'espace, dans le temps et dans son individualité, a dû être abandonnée.

Il est néanmoins intéressant de considérer un cas - qui a joué un rôle historique important - où une représentation classique des particules et de leurs interactions fournit un résultat en accord avec l'expérience. Nous admettons qu'un atome d'hydrogène est constitué d'un proton autour duquel tourne un électron sur une trajectoire circulaire. Soit r le rayon de celle-ci. La masse m de l'électron est beaucoup plus petite que celle du proton, ce qui permet de considérer ce dernier comme immobile. Ecrivons l'équation de Newton:



$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Les deux particules exercent l'une sur l'autre des forces d'attraction électriques, qui s'expriment par une loi analogue à celle de la gravitation:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

e est la charge du proton, et ε_0 une constante universelle qu'on appelle constante d'influence. On suppose le mouvement circulaire uniforme. L'accélération vaut:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

On en déduit:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m.\frac{v^2}{r}.$$

On obtient ainsi la relation entre la vitesse et la position de l'électron:

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 rm}}. \qquad (1)$$

Si l'on en reste aux conceptions de la mécanique classique, le rayon r de l'orbite électronique peut prendre n'importe quelle valeur. Au début du 20e siècle, on s'est aperçu qu'à l'échelle de l'atome, les grandeurs physiques ne sont pas des variables continues, mais qu'elles ne peuvent avoir que des valeurs discrètes. C'est le principe de quantification. Ainsi, le rayon de l'orbite électronique ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées. Chacune de ces valeurs définit un état de l'atome d'hydrogène, auquel correspondent une vitesse de révolution de l'électron, une énergie, et un moment cinétique. Toutes ces grandeurs physiques ne peuvent donc varier que par sauts, les valeurs intermédiaires entre celles qui correspondent à deux états voisins étant physiquement impossibles. L'ampleur de ces sauts fait toujours intervenir une constante de quantification, appelée constante de Plank (déjà mentionnée au § 93):

$$h = 6{,}63.10^{-34}\ \text{Js}.$$

On utilise aussi la valeur (lisez: h barre):

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Ces constantes ont les dimensions physiques d'un moment cinétique ($1\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1} = 1\ \text{Js}$). Aussi n'est-il pas étonnant que le moment cinétique de l'électron soit quantifié selon une fonction simple de ces constantes. Dans la théorie simplifiée de Bohr, on pose:

$$L = n\hbar \qquad \text{où} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Cette relation s'écrit aussi

$$mvr = n\hbar \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{n\hbar}{mr}. \qquad (2)$$

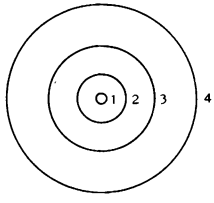
Les équations (1) et (2) permettent de calculer r et v. En élevant au carré, on a:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 rm} = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}$$

d'où $$r = n^2 . \frac{4\pi\varepsilon\hbar^2}{me^2}. \qquad (3)$$

On peut écrire: $r = n^2 . r_1$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$

Les différents rayons possibles pour une orbite électronique valent donc 1, 4, 9, 16, ... fois la longueur r_1, qui est appelée <u>premier rayon de Bohr.</u>



$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon\hbar^2}{me^2} = 0{,}529.10^{-10}\ \text{m} = 0{,}529\ \text{Å}.$$

Ce premier résultat est intéressant en ce qu'il fournit l'ordre de grandeur du rayon de l'atome d'hydrogène.

Dans le champ de force électrique créé par le proton, l'énergie potentielle de l'électron vaut (remarquer l'analogie avec l'énergie potentielle gravifique):

$$E_p = - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon r}.$$

L'énergie mécanique totale de l'électron tournant à une distance r du proton vaut donc, d'après la relation (1):

$$E = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m.\frac{e^2}{4\pi\varepsilon rm} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon r}$$

$$E = - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon r}.$$

Cette énergie est toujours négative puisque l'électron est lié au proton (§ 93).

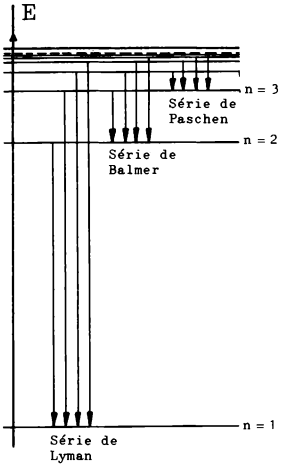
La quantification du moment cinétique a amené celle du rayon de l'orbite. Cette dernière entraîne celle de l'énergie. En introduisant la condition (3) dans la dernière relation, nous obtenons les différents états énergétiques possibles pour l'électron.

$$E = - \frac{e^2 . me^2}{8\pi\varepsilon . n^2 . 4\pi\varepsilon\hbar^2}$$

$$E = - \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} . \frac{1}{n^2} \qquad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Le niveau d'énergie le plus bas où puisse se trouver l'électron est donné par n = 1. C'est <u>l'état fondamental.</u> L'électron

peut aussi être à des niveaux supérieurs correspondant à n = 2, 3, ... Ce sont des états excités. Il peut passer d'un niveau à l'autre s'il absorbe ou émet l'énergie correspondant à la différence de niveau. Si l'électron est dans un état excité, il saute spontanément de son niveau à un niveau inférieur. L'énergie qu'il perd lors du saut est émise hors de l'atome sous la forme d'une petite onde électromagnétique. A certains égards, celle-ci se comporte comme une particule, qu'on appelle alors photon. La fréquence ν de l'onde émise (ou du photon) est proportionnelle à l'énergie qu'elle emporte, selon la relation fondamentale



$$E = h\nu.$$

Si l'électron passe du niveau n au niveau inférieur n', la fréquence de l'onde est donc:

$$\nu = \frac{E_n - E_{n'}}{h} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Sa longueur d'onde λ se déduit de la fréquence par la relation

$$\lambda\nu = c,$$

où c est la vitesse de la lumière.

Ces ondes électromagnétiques peuvent être observées. Lorsqu'on réalise une décharge électrique dans de l'hydrogène, on provoque de violentes collisions de particules. Les électrons peuvent recevoir l'énergie nécessaire pour passer du niveau fondamental à des niveaux supérieurs, ou même pour quitter le proton auquel ils étaient liés. Très rapidement ils retombent dans leur état fondamental en sautant d'un niveau à l'autre et en émettant des photons. L'analyse spectrométrique de la lumière émise par une décharge électrique dans l'hydrogène doit donc montrer des raies bien définies, dont les longueurs d'ondes sont données par la relation

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_n - E_{n'}}$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

A la fin du siècle passé, Balmer avait étudié les raies spectrales de l'hydrogène. Cherchant une loi qui exprime quantitativement la distribution des longueurs d'onde observées, il avait découvert la règle empirique suivante, sans pouvoir lui donner de justification théorique:

n	λ
3	6563 Å
4	4862
5	4341
6	4102
.	....

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

R est une constante qu'on appelle constante de Rydberg, et qui vaut

$$R = 1{,}097.10^7\ m^{-1}.$$

Balmer supposa que le dénominateur 2 de sa formule pourrait être remplacé par un autre nombre entier, et que l'ensemble des longueurs d'onde possibles était donné par

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

En posant $n' = 1$, on obtient des longueurs d'onde appartenant à l'ultra-violet. Conformément à la prévision de cette formule, on découvrit en effet une série de raies spectrales ultraviolettes avec les longueurs d'onde convenables (série de Lyman). En posant $n' = 3$, on obtient une série de longueurs d'onde appartenant à l'infra-rouge. Elles furent aussi découvertes (série de Paschen), de même que d'autres séries de raies correspondant à $n' = 4, 5, \ldots$

En 1913, Bohr imagina la quantification de l'énergie de l'électron, selon la théorie présentée ici, pour expliquer la formule de Balmer pour les raies spectrales de l'hydrogène. En outre, il fournissait une valeur théorique de la constante de Rydberg, la rattachant à des grandeurs fondamentales.

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^3 c}.$$

Le remarquable accord entre les résultats de cette théorie et les résultats expérimentaux donna aux hypothèses fondamentales de Bohr un très grand crédit, et orienta la recherche scientifique de son époque.

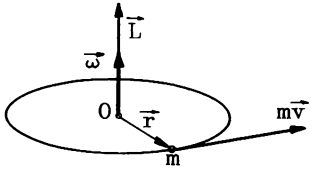
On a dû reconnaître par la suite que ce modèle de l'atome d'hydrogène était par trop simplifié, et qu'une description correcte du comportement des particules ne peut être faite sans l'introduction de la notion d'onde. En dépit de ces perfectionnements plus récents, on peut dire toutefois que le principe de

quantification, mis au premier plan de cette théorie, n'a pas été abandonné.

§ 114* Exemples de calcul

Exemple 1*: Calculer le moment cinétique d'une particule de masse m qui décrit un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire ω.

△△△ Prenons l'origine au centre du cercle. Les vecteurs $\vec{r}$ et $m\vec{v}$ sont constamment dans le plan du cercle. Leur produit vectoriel est donc perpendiculaire à ce plan. La distance de l'origine au support de $m\vec{v}$ vaut toujours R. Le moment cinétique a donc pour grandeur



$$L = mvR.$$

Nous avons établi (§ 23) que: $v = \omega R.$

Il en résulte: $L = m\omega R^2 = mR^2\omega.$

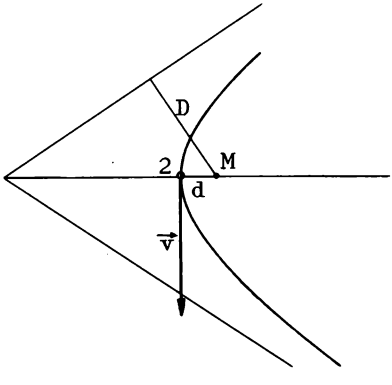
Rien ne nous empêche d'écrire cette relation vectoriellement. Il suffit pour cela d'introduire un vecteur $\vec{\omega}$, perpendiculaire au plan du cercle et orienté selon l'avance d'une vis que l'on ferait tourner comme la particule. On a alors:

$$\vec{L} = mR^2\vec{\omega}.$$

Exemple 2*: Une comète se trouve initialement très loin du soleil et a, relativement à lui, une vitesse $\vec{v}_\infty$. Le support de $\vec{v}_\infty$ passe à une distance D du soleil. La masse m de la comète est très inférieure à la masse M du soleil.

a) Déterminer la vitesse de la comète lorsque sa distance au soleil est minimale, et cette distance.

b) Déterminer l'angle de déviation de la trajectoire.



△△△ a) La comète ne subit que la force de gravitation du soleil, qui est une force centrale. Donc son moment cinétique se conserve.

$\vec{L}$

$$L_1 = L_2$$

$$mv_o D = mvd$$

$$v_o D = vd \qquad (1)$$

L'énergie mécanique se conserve aussi.

$$E_1 = E_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{d}$$

$$v_o^2 = v^2 - \frac{2GM}{d} \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) permettent de calculer v et d.

$$d = \frac{v_o D}{v}$$

$$v_o^2 = v^2 - 2GM.\frac{v}{v_o D}$$

$$v_o D.v^2 - 2GM.v - v_o^3 D = 0$$

$$v = \frac{GM \pm \sqrt{G^2M^2 + v_o^4 D^2}}{v_o D}$$

La racine est manifestement supérieure à GM. Le signe - conduit donc à une valeur négative de v, qui est à rejeter. La vitesse maximale de la comète est donc

$$v = \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 + v_o^4 D^2}}{v_o D}. \qquad (3)$$

Posons, pour simplifier l'écriture:

$$r = \sqrt{G^2M^2 + v_o^4 D^2}.$$

Des relations (1) et (3), on déduit:

$$d = \frac{v_o D}{v} = v_o D.\frac{v_o D}{GM + r} = \frac{v_o^2 D^2 (GM - r)}{(GM + r)(GM - r)}$$

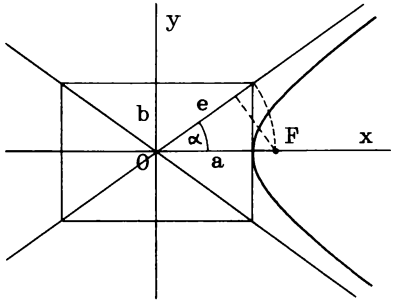
$$= \frac{v_o^2 D^2 (GM - r)}{G^2M^2 - G^2M^2 - v_o^4 D^2} = \frac{GM - r}{-v_o^2} = \frac{r - GM}{v_o^2}.$$

La distance minimale de la comète au soleil est donc:

$$d = \frac{\sqrt{G^2M^2 + v_\infty^4 D^2} - GM}{v_\infty^2}.$$

b) La trajectoire de la comète est une branche d'hyperbole dont le soleil occupe un foyer. Son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



a et b sont les demi-axes. La distance du centre de la courbe au foyer est e, où

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

La distance minimale d de la comète au soleil est e - a.

$$e - a = \frac{r - GM}{v_\infty^2}. \qquad (5)$$

Le support de $\vec{v_\infty}$ est une des asymptotes. La distance du foyer à l'asymptote est égale à b. Donc

$$b = D. \qquad (6)$$

Pour toute hyperbole, on peut écrire:

$$b^2 = (e + a)(e - a) \qquad \text{ou} \qquad e + a = \frac{b^2}{e - a}$$

On en déduit ici, d'après les relations (5) et (6):

$$e + a = D^2 \cdot \frac{v_\infty^2}{r - GM} = \frac{D^2 v_\infty^2 (r + GM)}{(r - GM)(r + GM)} = \frac{D^2 v_\infty^2 (r + GM)}{G^2M^2 + v_\infty^4 D^2 - G^2M^2}$$

$$e + a = \frac{r + GM}{v_\infty^2} \qquad (7)$$

En additionnant et en soustrayant les équations (5) et (7), on obtient:

$$e = \frac{\sqrt{G^2M^2 + v_\infty^4 D^2}}{v_\infty^2} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{GM}{v_\infty^2}$$

On trouve donc, pour les demi-axes de l'hyperbole les expres-

sions remarquablement simples:

$$a = \frac{GM}{v_o^2} \qquad \text{et} \qquad b = D.$$

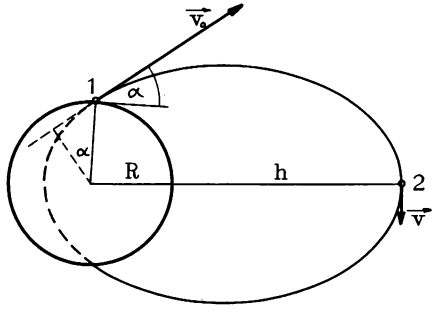
On a en outre: $$tg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{v_o^2 D}{GM}.$$

L'angle formé par les portions de trajectoire très éloignées du soleil est égal à l'angle des asymptotes. Il vaut:

$$2\alpha = 2 \text{ arc tg } \frac{v_o^2 D}{GM}.$$

Exemple 3*: Un projectile est lancé obliquement depuis la surface de la terre. Sa vitesse initiale a une grandeur v_o = 10 km/s et forme un angle $\alpha = 40^o$ avec l'horizontale. Calculer l'altitude h qu'il atteint et sa vitesse v au point culminant. On suppose connue la vitesse de libération: u = 11,2 km/s.

△△△ Soient m la masse du projectile, M la masse de la terre et R son rayon. Comparons les états du mobile au départ et au point culminant. On suppose que le frottement de l'atmosphère est négligeable, ce qui revient à considérer que le tir est effectué depuis les couches supérieures de l'atmosphère. Le mobile ne subit donc qu'une force, et celle-ci est centrale et conservative. Le moment cinétique et l'énergie mécanique se conservent. On a, d'une part:



$$L_1 = L_2$$

$$mv_o R \cos\alpha = mv(R + h)$$

$$v_o R \cos\alpha = v(R + h) \qquad (1)$$

et d'autre part:

$$E_1 = E_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R + h}$$

$$v_o^2 - \frac{2GM}{R} = v^2 - \frac{2GM}{R + h}$$

$2GM/R$ est le carré de la vitesse de libération u (§ 90). La relation précédente peut alors s'écrire:

$$v_o^2 - u^2 = v^2 - u^2 \frac{R}{R + h}. \qquad (2)$$

Le système des deux équations (1) et (2) permet de calculer les deux inconnues v et h.

De (1), on tire: $R + h = \frac{v_o R \cos\alpha}{v}$.

En introduisant cette valeur dans (2), on trouve:

$$v_o^2 - u^2 = v^2 - u^2 \frac{v}{v_o \cos\alpha}$$

$$v_o \cos\alpha . v^2 - u^2 . v + v_o \cos\alpha (u^2 - v_o^2) = 0$$

$$v = \frac{u^2 \pm \sqrt{u^4 - 4v_o^2 \cos^2\alpha (u^2 - v_o^2)}}{2v_o \cos\alpha}$$

Les deux solutions correspondent, l'une à l'apogée, l'autre au périgée de la trajectoire. Comme celle-ci coupe la terre, le second de ces points est virtuel. La vitesse du projectile au point culminant est évidemment la plus petite des deux solutions. Elle vaut donc

$$v = \frac{u^2 - \sqrt{u^4 - 4v_o^2 \cos^2\alpha (u^2 - v_o^2)}}{2v_o \cos\alpha}$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$r = \sqrt{u^4 - 4v_o^2 \cos^2\alpha (u^2 - v_o^2)}.$$

La relation (1) fournit:

$$R + h = \frac{v_o R \cos\alpha}{v} = \frac{v_o R \cos\alpha . 2v_o \cos\alpha}{u^2 - r}$$

$$= \frac{2v_o^2 R \cos^2\alpha (u^2 + r)}{(u^2 - r)(u^2 + r)} = \frac{2v_o^2 R \cos^2\alpha (u^2 + r)}{4v_o^2 \cos^2\alpha (u^2 - v_o^2)}.$$

L'altitude h du point culminant est donc fournie par la relation

$$R + h = \frac{u^2 + \sqrt{u^4 - 4v_o^2 \cos^2\alpha (u^2 - v_o^2)}}{2(u^2 - v_o^2)} . R$$

Pour effectuer le calcul numérique, cherchons d'abord la valeur de la racine, en prenant comme unité le km/s.

$$r = \sqrt{11,2^4 - 4.10^2.0,766^2(11,2^2 - 10^2)} = 98,8$$

$$v = \frac{125,4 - 98,8}{2.10.0,766} = 1,74$$

La vitesse au sommet de la trajectoire vaut 1,74 km/s. D'autre part, on a:

$$R + h = \frac{125,4 + 98,8}{2(125,4 - 100)}.R = 4,41.R$$

L'altitude maximale du projectile vaut donc

$$h = 4,41.R - R = 3,41.R = 3,41.6,37.10^6 \text{ m} = 21,7.10^6 \text{ m}$$

h = 21'700 km.

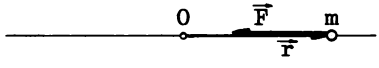
Chapitre 20

MOUVEMENT HARMONIQUE

§ 115 Oscillateur harmonique

On rencontre très souvent, dans la nature ou dans la technique, des systèmes pouvant effectuer des oscillations. Cela se réalise chaque fois qu'un objet possède une position d'équilibre et qu'une force tend à l'y ramener dès qu'il en est écarté. Une telle force est appelée force de rappel, parce qu'elle "rappelle" l'objet à sa position d'équilibre lorsqu'il se trouve dans une position voisine. Un pendule, un objet suspendu à un ressort, un flotteur, une corde de guitare constituent des oscillateurs.

Le plus simple des oscillateurs est celui pour lequel la force de rappel est proportionnelle à l'écart de l'objet. Nous appelons écart de l'objet à un instant donné le déplacement qu'il a subi relativement à sa position d'équilibre. Si on choisit l'origine du référentiel à cette position d'équilibre, l'écart s'identifie au vecteur position $\vec{r}$ de l'objet. La force de rappel s'exprime alors par la relation



$$\vec{F} = -k\vec{r}, \qquad (1)$$

où k est une constante de proportionnalité qu'on nomme constante de rappel. k est défini positif et se mesure en N/m. Le signe - indique que la force est orientée dans le sens opposé à l'écart. Les oscillateurs dans lesquels la force de rappel est proportionnelle à l'écart sont appelés oscillateurs harmoniques.

Pour étudier le mouvement d'un tel oscillateur, partons de l'équation de Newton:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}.$$

Rappelons que $\ddot{\vec{r}}$ désigne la seconde dérivée du vecteur position $\vec{r}$, relativement au temps, donc l'accélération. Compte tenu de

la relation (1), cette équation devient:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

ou

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r} \qquad (2)$$

Nous avons ici une équation différentielle pour l'horaire du mouvement. Quelles sont les fonctions

$$\vec{r} = f(t)$$

dont la seconde dérivée est proportionnelle à la fonction, avec un coefficient négatif ? Les fonctions sinus et cosinus jouissent de cette propriété. Essayons donc d'écrire un horaire à l'aide de l'une de ces fonctions, par exemple:

$$\vec{r} = \vec{A}\ \sin\omega t. \qquad (3)$$

L'argument du sinus doit être un nombre pur. ω est donc une constante se mesurant en s^{-1}. Le sinus lui-même est un nombre pur. Le vecteur constant $\vec{A}$ doit donc se mesurer en m. Il reste à savoir si cette fonction satisfait effectivement à l'équation différentielle (2) et si les paramètres $\vec{A}$ et ω sont libres ou déterminés. Dérivons deux fois de suite la fonction (3).

$$\dot{\vec{r}} = \vec{A}\omega\ \cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{A}\omega^2 \sin\omega t.$$

L'équation différentielle devient alors:

$$-\vec{A}\omega^2 \sin\omega t = -\frac{k}{m}\vec{A}\ \sin\omega t.$$

On voit qu'elle est satisfaite à tout instant t sous la seule condition:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

On en conclut qu'un horaire possible pour l'oscillateur harmonique est

$$\boxed{\vec{r} = \vec{A}\ \sin\omega t} \qquad (4)$$

où

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.} \qquad (5)$$

Le paramètre $\vec{A}$ n'est assujetti à aucune condition par l'équation différentielle.

Le lecteur vérifiera que la fonction $\vec{r} = \vec{A} \cos\omega t$

et, plus généralement, les fonctions

$$\vec{r} = \vec{A} \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{et} \qquad \vec{r} = \vec{A} \sin\omega t + \vec{B} \cos\omega t$$

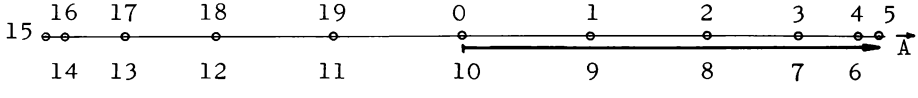
satisfont à l'équation différentielle tout aussi bien que la fonction (3). Ainsi, le mouvement d'un oscillateur harmonique, ou mouvement harmonique, peut aussi s'exprimer à l'aide d'une de ces fonctions. Cela nous mènerait trop loin de considérer toutes les formes mathématiques possibles de l'horaire. Si l'oscillateur se meut sur une droite, on peut toujours exprimer son horaire à l'aide de la fonction sinus, moyennant un choix convenable de l'origine du temps.

A cause de la forme de son horaire, le mouvement harmonique est aussi appelé mouvement sinusoïdal. Le terme "harmonique" vient du fait que ce mouvement joue le rôle de premier plan dans les phénomènes musicaux.

Examinons de plus près l'horaire

$$\vec{r} = \vec{A} \sin\omega t.$$

En donnant des valeurs particulières aux paramètres $\vec{A}$ et ω, on peut calculer les positions successives de l'oscillateur, à des instants régulièrement espacés dans le temps. On obtient alors une représentation du genre suivant:



Le vecteur position est toujours parallèle au vecteur constant $\vec{A}$. Le mouvement a donc lieu sur une droite parallèle à $\vec{A}$. Le sinus varie entre -1 et 1. Le vecteur $\vec{r}$ varie donc entre $-\vec{A}$ et $\vec{A}$. Ce vecteur $\vec{A}$ représente l'écart maximal de l'oscillation. On le nomme amplitude de celle-ci. L'oscillateur décrit un segment de longueur 2A.

La fonction sinus a une période de 2π:

$$\vec{A} \sin(\omega t + 2\pi) = \vec{A} \sin\omega t$$

La période T de l'oscillateur est la durée d'une oscillation complète. En d'autres termes, c'est le temps qui doit s'écou-

ler, depuis une date t quelconque, pour que l'oscillateur se retrouve dans le même état. Elle est définie par la condition:

$$\vec{A}\ \sin\omega(t + T) = \vec{A}\ \sin\omega t.$$

La comparaison des deux dernières relations fournit:

$$\boxed{\omega T = 2\pi.}$$

La <u>fréquence</u> ν de l'oscillation, qui est le nombre d'oscillations effectuées par unité de temps, est définie par la relation

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}.}$$

Elle se mesure en s^{-1}. Des deux dernières formules, on déduit:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

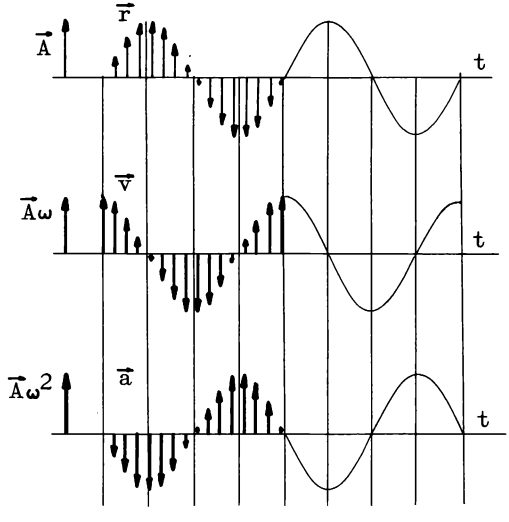
La constante ω est donc proportionnelle à la fréquence de l'oscillateur. Cela lui vaut le nom de <u>fréquence circulaire.</u> On l'appelle aussi <u>pulsation.</u>

Les horaires du mobile, de la vitesse et de l'accélération sont respectivement:

$$\vec{r} = \vec{A}\ \sin\omega t$$

$$\vec{v} = \vec{A}\omega\ \cos\omega t$$

$$\vec{a} = -\vec{A}\omega^2 \sin\omega t$$



Les valeurs de ces vecteurs à des dates successives peuvent être représentées schématiquement comme on le voit ci-contre. La vitesse est maximale quand l'écart est nul, et vice versa. On peut faire la même observation en ce qui concerne l'accélération. En revanche, l'écart et l'accélération varient proportionnellement, mais sont toujours de sens contraires.

Il importe de remarquer que les caractéristiques physiques d'un oscillateur harmonique, à savoir sa masse m et sa constante de rappel k, déterminent sa fréquence circulaire ω (relation 5), et par conséquent sa période:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

En revanche, elles n'imposent aucune condition à son amplitude $\overline{A}$. L'oscillateur peut donc avoir n'importe quelle amplitude (y compris $\vec{0}$), dans les limites où la force de rappel est proportionnelle à l'écart. Dans beaucoup de situations réelles, cette proportionnalité n'est vraie que pour les petits écarts. L'oscillateur n'est harmonique que si on se limite aux petites oscillations. C'est le cas, par exemple, pour le pendule (voir § 117).

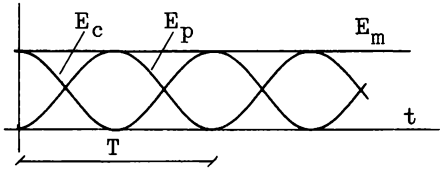
L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique se compose d'un terme cinétique et d'un terme potentiel:

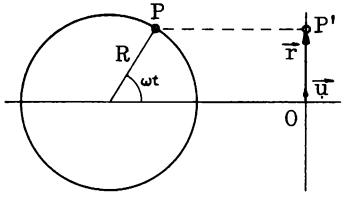
$$E_m = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kr^2 = \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t + \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t.$$

Compte tenu de la relation $\omega^2 = \frac{k}{m}$, on a:

$$E_m = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t = \tfrac{1}{2}kA^2.$$

Ainsi qu'on pouvait s'y attendre, on constate que l'énergie mécanique est constante. Un oscillateur harmonique est un système dans lequel l'énergie passe alternativement de la forme cinétique à la forme potentielle. Lorsque le mobile passe par sa position d'équilibre, son énergie cinétique est maximale et son énergie potentielle nulle. Lorsqu'il est aux extrémités de sa trajectoire, son énergie cinétique est nulle et son énergie potentielle maximale.





Considérons un point P ayant un mouvement uniforme sur un cercle de rayon R. Soit ω sa vitesse angulaire, c'est-à-dire l'angle qu'il parcourt par unité de temps. La projection P' du point P sur un axe situé dans le plan du cercle décrit un mouvement

de va-et-vient. L'horaire de P' est

$$\vec{r} = \vec{u}\, R \sin\omega t.$$

Ce point a donc un mouvement harmonique de fréquence circulaire ω. Sous forme résumée, on peut dire que la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur une droite appartenant au plan du cercle est un mouvement harmonique. L'étude faite au paragraphe 23 impliquait déjà cette conclusion. On peut interpréter l'horaire qui avait été établi alors,

$$\vec{r} = \vec{i}\, R \cos\omega t + \vec{j}\, R \sin\omega t$$

en disant que le mouvement circulaire uniforme est une superposition de deux mouvements harmoniques perpendiculaires.

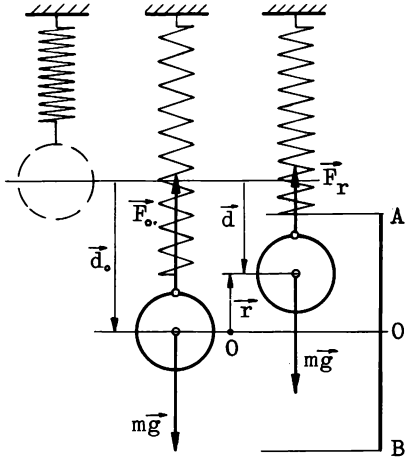
§ 116 Objet suspendu à un ressort

Considérons un objet de masse m suspendu à un ressort de raideur k. Lorsqu'il est immobile, le ressort subit une déformation $\vec{d}_o$, et la force élastique

$$\vec{F}_o = -k\vec{d}_o$$

est exactement compensée par le poids.

$$m\vec{g} - k\vec{d}_o = \vec{0}.$$



Plaçons l'origine du référentiel au point d'équilibre. Supposons que l'objet oscille verticalement. Lorsqu'il est dans une position quelconque, caractérisée par un écart $\vec{r}$, le ressort a une déformation

$$\vec{d} = \vec{d}_o + \vec{r}$$

et exerce une force

$$\vec{F}_r = -k(\vec{d}_o + \vec{r}).$$

La résultante des forces qui s'exercent sur le mobile est alors

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_r = m\vec{g} - k\vec{d}_o - k\vec{r} = -k\vec{r}.$$

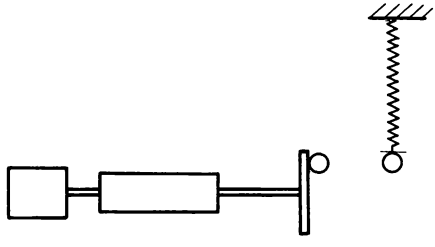
C'est une force de rappel proportionnelle à l'écart. Un objet

suspendu à un ressort est donc un oscillateur harmonique. La constante de rappel s'identifie ici à la constante du ressort et la période d'oscillation vaut

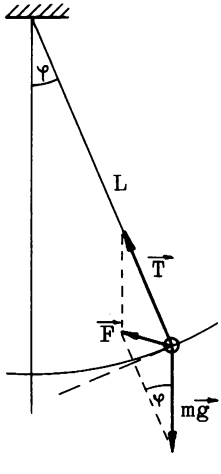
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Le segment AB de la figure ci-dessus indique une trajectoire possible.

On peut vérifier qu'on a bien un mouvement harmonique par l'expérience suivante. Une boule est fixée à un disque dont l'axe est horizontal. Le disque est entraîné par un moteur et un réducteur de vitesse. La boule et l'objet suspendu sont éclairés par un faisceau lumineux horizontal perpendiculaire à l'axe du moteur, et on observe les ombres des deux mobiles sur un écran. En réglant convenablement les positions, les fréquences et les amplitudes, on parvient à rendre identiques les mouvements des deux ombres. La boule a un mouvement circulaire uniforme. Son ombre a donc un mouvement harmonique. On en conclut que l'objet suspendu au ressort a aussi un mouvement harmonique.



§ 117 Pendule



Un petit objet de masse m se trouve au bout d'un fil de longueur L et de masse négligeable. Le fil est attaché à un point fixe et le système oscille dans un plan vertical. Cherchons à calculer la période d'oscillation du pendule ainsi constitué.

Deux forces s'exercent sur le mobile: son poids $m\vec{g}$ et une force de traction $\vec{T}$ de la part du fil. Leur résultante est parallèle à l'accélération. Elle est donc dirigée vers la concavité de la trajectoire. Le mobile possède une position d'équilibre, c'est le point le plus bas de la trajectoire. La résultante des forces que subit le mobile est une force de rappel. Toutefois, elle n'est pas dirigée vers la position d'équilibre, de sorte qu'elle ne satisfait

certainement pas à une relation de la forme $\vec{F} = -k\vec{r}$. Nous devrons nous contenter d'une approximation.

La force $\vec{T}$, qui est perpendiculaire à la trajectoire, est inopérante pour ramener l'objet à sa position d'équilibre. Il en est de même de la composante normale de $m\vec{g}$. N'agit comme force de rappel que la composante tangentielle de $m\vec{g}$, qui est en même temps la composante tangentielle de $\vec{F}$. Sa grandeur est:

$$F_t = mg \sin\varphi$$

où φ est l'angle fait par le fil avec la verticale. Si on se limite aux petites oscillations, on peut confondre $\sin\varphi$ et φ. La force de rappel vaut alors:

$$F_t = mg\varphi.$$

Désignons par x la distance du mobile à sa position d'équilibre, mesurée le long de la trajectoire. C'est l'écart. L'angle φ et l'arc x sont liés par la relation: $\varphi = x/L$. On a donc:

$$F_t = \frac{mgx}{L}.$$

Dans la mesure où notre approximation est valable, la force de rappel est proportionnelle à l'écart. Un pendule qui effectue de petites oscillations a donc un mouvement harmonique. La constante de rappel k a la valeur mg/L. La période vaut:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg}}$$

ou

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.}$$

En comparant ce résultat à celui du paragraphe 44, on voit qu'un pendule conique et un pendule ordinaire de même longueur ont la même période, si on se limite aux petits angles. L'étude du pendule est reprise au paragraphe 137.

§ 118* Oscillations amorties

La plupart des oscillateurs harmoniques subissent, outre la force de rappel

$$\vec{F} = -k\vec{r},$$

une force de frottement qui transforme peu à peu leur énergie mécanique en chaleur. L'amplitude de l'oscillation décroît progressivement et le mobile s'arrête. Ce phénomène est appelé amortissement. Pour l'étudier quantitativement, nous nous limiterons au cas le plus simple, qui est celui où la force de frottement est proportionnelle à la vitesse. Cette situation se réalise si l'oscillateur se meut dans un fluide, à une vitesse suffisamment petite pour que l'écoulement soit laminaire (§ 68). La force de frottement peut s'écrire :

$$\vec{F}' = -f\vec{v}$$

où f est une constante de proportionnalité. L'équation de Newton prend la forme:

$$-k\vec{r} - f\vec{v} = m\vec{a}$$

ou

$$m\ddot{\vec{r}} + f\dot{\vec{r}} + k\vec{r} = \vec{0}.$$

C'est une équation différentielle pour la fonction horaire

$$\vec{r} = f(t).$$

On peut s'attendre à obtenir un mouvement sinusoïdal dans lequel l'amplitude est une fonction qui diminue au cours du temps. Essayons de prendre pour l'amplitude une fonction exponentielle décroissante. La fonction

$$\vec{r} = \vec{A}e^{-\delta t} \sin\omega t$$

où $\vec{A}$, δ et ω sont des constantes, serait-elle solution de l'équation différentielle ? Ses dérivées sont:

$$\dot{\vec{r}} = -\delta\vec{A}e^{-\delta t} \sin\omega t + \omega\vec{A}e^{-\delta t} \cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{r}} = \delta^2\vec{A}e^{-\delta t} \sin\omega t - \delta\omega\vec{A}e^{-\delta t} \cos\omega t$$

$$- \delta\omega\vec{A}e^{-\delta t} \cos\omega t - \omega^2\vec{A}e^{-\delta t} \sin\omega t.$$

Introduisons les fonctions $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ et $\ddot{\vec{r}}$ dans l'équation différentielle, en groupant les termes contenant les fonctions du même type.

$$(m\delta^2 - m\omega^2 - f\delta + k)\vec{A}e^{-\delta t} \sin\omega t + (-2m\delta\omega + f\omega)\vec{A}e^{-\delta t} \cos\omega t = \vec{0}$$

Cette équation est vérifiée à tout instant t si les coefficients des deux fonctions du temps sont nuls.

$$m\delta^2 - m\omega^2 - f\delta + k = 0 \qquad -2m\delta\omega + f\omega = 0$$

Ces deux conditions déterminent les paramètres δ et ω. On a d'abord:

$$\delta = \frac{f}{2m}$$

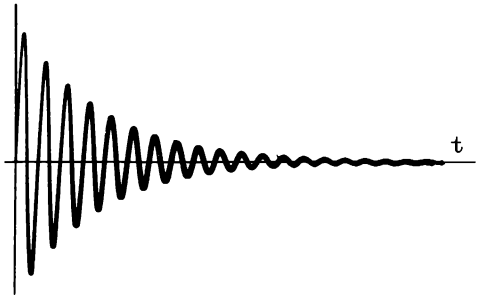
et ensuite: $$m\frac{f^2}{4m^2} - m\omega^2 - \frac{f^2}{2m} + k = 0$$

d'où $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}}.$$

Nous concluons que l'horaire d'un mouvement oscillatoire amorti peut se mettre sous la forme

$$\vec{r} = \vec{A}e^{-\delta t}\sin\omega t.$$

C'est donc une fonction sinusoïdale du temps, dont l'amplitude décroît selon une fonction exponentielle. δ est la <u>constante d'amortissement</u> de l'oscillateur. Elle se mesure en s^{-1}.



Posons $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

ω_o est la fréquence circulaire de l'oscillateur non amorti. Celle de l'oscillateur amorti peut s'écrire sous la forme

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}.$$

Lorsque l'amortissement est faible, δ est petit devant ω_o et ω est pratiquement égal à ω_o. Voir l'exemple 6 du paragraphe 120. Lorsque l'amortissement est fort, plus précisément lorsque δ est plus grand que ω_o, le système n'est plus capable d'osciller.

Un mouvement oscillatoire amorti n'est pas, à proprement parler, périodique. La durée d'une oscillation

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

est appelée <u>pseudo-période.</u>

§ 119* Oscillations forcées et résonance

Lorsqu'un oscillateur de masse m subit une force de rappel proportionnelle à son écart

$$\vec{F} = -k\vec{r},$$

il a un mouvement harmonique de fréquence circulaire

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

S'il subit en outre une force de frottement proportionnelle à sa vitesse

$$\vec{F}' = -f\vec{v},$$

son mouvement est amorti (§ 118). Le coefficient d'amortissement et la fréquence circulaire sont

$$\delta = \frac{f}{2m} \qquad \text{et} \qquad \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

ω_p est appelée fréquence circulaire propre du système. C'est sa fréquence circulaire lorsqu'il est abandonné à lui-même.

Que se passe-t-il si un oscillateur subit, outre la force de rappel et la force de frottement, une force qui varie de façon sinusoïdale en fonction du temps, à une fréquence circulaire quelconque ω ?

$$\vec{F}'' = \vec{F}_0 \sin\omega t.$$

Cette situation se réalise lorsqu'on cherche à faire osciller un système à une fréquence qui n'est pas nécessairement égale à sa fréquence propre. La force qu'on exerce alors sur lui est appelée contrainte. Nous allons montrer que l'oscillateur prend un mouvement harmonique avec la fréquence de la contrainte. Les oscillations sont dites forcées. L'amplitude de ce mouvement n'est grande que si la fréquence de la contrainte est voisine de la fréquence propre. Ce phénomène, appelé résonance, se comprend intuitivement. Si les fréquences sont égales, ou à peu près, la contrainte exerce toujours son action sur l'oscillateur de façon à favoriser son mouvement. Comme lorsqu'un enfant pousse une balançoire. Ce sont alors les frottements qui donnent une limite à l'amplitude.

Nous ne nous occuperons pas de la phase transitoire dans laquelle la contrainte commence à s'exercer et à mettre en mou-

vement l'oscillateur, mais seulement du régime stationnaire qui suit, dans lequel l'amplitude du mouvement est constante.

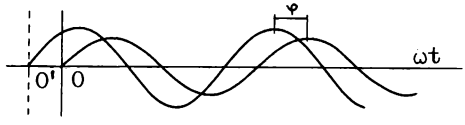
L'équation de Newton s'écrit:

$$-k\vec{r} - f\dot{\vec{r}} + \vec{F}_0 \sin\omega t = m\ddot{\vec{r}}.$$

C'est une équation différentielle pour l'horaire. Comme indiqué plus haut, nous recherchons une solution de la forme

$$\vec{r} = \vec{A} \sin(\omega t + \varphi).$$

L'angle φ, que nous introduisons ici dans l'argument du sinus, est appelé déphasage. Il exprime le décalage qu'il peut y avoir entre les instants où la force a ses maxima et ceux auxquels l'élongation a les siens.



La fonction $\vec{r}$ et ses dérivées apparaissant trois fois dans l'équation différentielle, nous avons avantage à l'écrire sous la forme mathématique la plus simple possible. Choisissons une nouvelle origine du temps à un instant où le mobile passe par sa position d'équilibre. L'horaire et la contrainte s'expriment alors par les fonctions

$$\vec{r} = \vec{A} \sin\omega t' \qquad \text{et} \qquad \vec{F}'' = \vec{F}_0 \sin(\omega t' - \varphi).$$

L'équation différentielle prend la forme

$$-k\vec{r} - f\dot{\vec{r}} + \vec{F}_0 \sin(\omega t' - \varphi) = m\ddot{\vec{r}}.$$

Introduisons dans celle-ci la fonction $\vec{r}$ et ses dérivées, et développons $\sin(\omega t' - \varphi)$.

$$-k\vec{A} \sin\omega t' - f\vec{A}\omega \cos\omega t' + \vec{F}_0 \sin\omega t' \cos\varphi - \vec{F}_0 \cos\omega t' \sin\varphi$$

$$= -m\vec{A}\omega^2 \sin\omega t'$$

$$(-k\vec{A} + \vec{F}_0 \cos\varphi + m\vec{A}\omega^2) \sin\omega t' - (f\vec{A}\omega + \vec{F}_0 \sin\varphi) \cos\omega t' = \vec{0}$$

Cette équation est satisfaite à tout instant t' si les coefficients de $\sin\omega t'$ et $\cos\omega t'$ sont nuls. On obtient donc, après projection sur un axe, les deux équations:

$$-kA + F_0 \cos\varphi + mA\omega^2 = 0 \qquad fA\omega + F_0 \sin\varphi = 0$$

qui permettent de calculer les paramètres A et φ. Le système d'équations peut s'écrire:

$$F_o \sin\varphi = -fA\omega$$

$$F_o \cos\varphi = kA - mA\omega^2$$

En divisant les équations membre à membre, on obtient φ. En les élevant au carré et en les additionnant, on trouve A.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f\omega}{m\omega^2 - k}.$$

$$F_o^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = f^2A^2\omega^2 + A^2(k - m\omega^2)^2$$

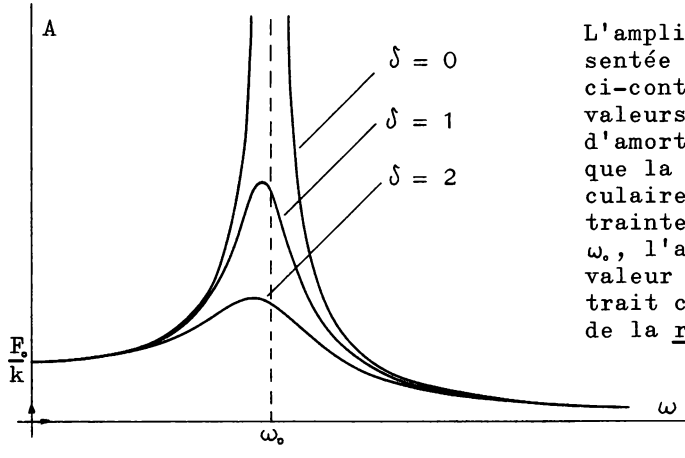
$$A = \frac{F_o}{\sqrt{f^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}.$$

L'oscillateur a donc un mouvement harmonique dont la fréquence est égale à celle de la contrainte. L'amplitude de ce mouvement et son déphasage relativement à la contrainte sont donnés par les relations ci-dessus. En remplaçant k et f par les valeurs

$$k = m\omega_o^2 \qquad \text{et} \qquad f = 2m\delta$$

et en simplifiant, on trouve:

$$A = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\delta^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_o^2)^2}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_o^2}.$$



L'amplitude est représentée dans le graphique ci-contre, pour trois valeurs du coefficient d'amortissement. Lorsque la fréquence circulaire ω de la contrainte est voisine de ω_o, l'amplitude a une valeur élevée. C'est le trait caractéristique de la résonance.

Pour trouver la valeur de ω qui correspond au maximum d'amplitude, on cherche le minimum de la fonction

$$y = 4\delta^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_o^2)^2.$$

Il suffit pour cela de calculer la dérivée de y par rapport à ω, et de chercher les valeurs de ω qui annulent cette dérivée.

$$\frac{dy}{d\omega} = 8\delta^2\omega + 2(\omega^2 - \omega_o^2).2\omega = 0$$

Outre la solution $\omega = 0$, qui ne correspond pas à un maximum, cette équation fournit:

$$2\delta^2 + \omega^2 - \omega_o^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\omega_o^2 - 2\delta^2}.$$

Le maximum d'amplitude est donc atteint pour la fréquence circulaire

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\delta^2}$$

qu'on appelle fréquence circulaire de résonance.

Lorsque le coefficient d'amortissement δ est petit, la fréquence de résonance et la fréquence propre de l'oscillateur sont pratiquement confondues.

$$\omega_r \cong \omega_p \qquad (\cong \omega_o)$$

L'amplitude de résonance vaut

$$\hat{A} = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\delta^2(\omega_o^2 - 2\delta^2) + 4\delta^4}} = \frac{F_o}{2m\delta\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}.$$

On voit que cette amplitude serait infinie si le coefficient d'amortissement était nul. Pour un oscillateur très peu amorti, l'amplitude de résonance est très grande.

Mentionnons quelques exemples de résonance.

1. En chantant près d'un piano, on peut mettre ses cordes en vibration. Il faut évidemment presser d'abord sur la pédale qui libère les cordes.

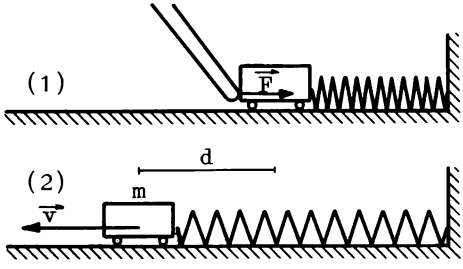
2. Si deux cordes de guitare sont tendues de façon à donner la même note, il suffit de faire vibrer l'une pour que l'autre se mette en mouvement.

3. Dans la construction des autos et des avions - ou d'autres machines - il faut veiller à ce que la fréquence propre de vibration des différentes pièces soit différente de la fréquence de la vibration produite par le moteur. Si on ne prend ces précautions, la résonance peut entraîner des ruptures.

§ 120 Exemples de calcul

Exemple 1: Sur une voie horizontale, on pousse un wagonnet de 200 g contre un ressort. En exerçant sur lui une force de 3 N, on produit une déformation de 10 cm. Le wagonnet étant immobile, on supprime brusquement la force qui le retient. Le ressort se détend et expulse le wagonnet. Calculer
a) la vitesse finale du mobile,
b) la durée de son trajet en contact avec le ressort.

△△△ Soient $\vec{F}$ la force qui pousse le wagonnet, ou qui comprime le ressort, et d la déformation résultante. Admettons que ces deux grandeurs soient proportionnelles. La constante du ressort est



$$k = \frac{F}{d}.$$

a) On peut utiliser le théorème de conservation de l'énergie, puisque toutes les forces qui s'exercent sur le wagonnet pendant la détente sont conservatives.

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$0 + \tfrac{1}{2}kd^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

La vitesse finale du wagonnet est donc:

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{d^2F}{dm}} = \sqrt{\frac{Fd}{m}}$$

ou
$$v = \sqrt{\frac{3\ \text{kgms}^{-2}.0{,}1\ \text{m}}{0{,}2\ \text{kg}}} = 1{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

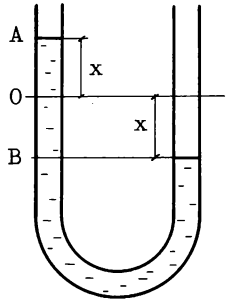
b) Pendant la durée de son expulsion, le wagonnet est un oscillateur harmonique. Cette durée correspond au quart d'une période de l'oscillateur. Elle vaut:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}.2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{md}{F}}$$

ou
$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0{,}2\ \text{kg}.0{,}1\ \text{m}}{3\ \text{kgms}^{-2}}} = 0{,}128\ \text{s}.$$

Exemple 2: Un liquide de masse spécifique ρ se trouve placé dans un tube en forme de U ayant une section S. Il occupe une longueur L du tube. Par un moyen ou un autre, on fait monter l'un des ménisques et on abandonne le système à lui-même. Il effectue une série d'oscillations. Calculer leur période.

△△△ Assimilons le liquide à un point matériel situé en un point quelconque du tube. Lorsque le liquide est dévié de sa position d'équilibre d'une longueur x, la force qui tend à l'y ramener est le poids de la portion de liquide comprise entre A et B (voir le dessin). Cette portion de liquide a un volume 2xS, une masse $2xS\rho$ et un poids $2xS\rho g$. La force de rappel vaut donc:



$$F = 2xS\rho g.$$

Elle est proportionnelle à l'écart x. On a donc un oscillateur harmonique.

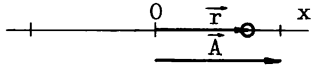
La constante de rappel vaut $2S\rho g$. Par ailleurs, la masse du liquide en mouvement est $SL\rho$. La période des oscillations vaut alors:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{SL\rho}{2S\rho g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}.$$

La section du tube et la masse spécifique du liquide ne jouent pas de rôle.

Exemple 3*: Un pendule décrit un arc de cercle de 30 cm de long, assimilable à un segment de droite. Il met 3 s pour franchir le trajet d'un bout à l'autre. Déterminer
a) sa position et sa vitesse une demi seconde après qu'il ait quitté une des extrémités,
b) le temps qu'il met pour franchir un trajet de 5 cm compté depuis une extrémité, et sa vitesse après ce trajet.

△△△ Le mobile a un mouvement harmonique, avec une période de 6 s et une amplitude de 15 cm. Choisissons l'origine du référentiel à la position d'équilibre et l'origine du temps lorsque le pendule passe à une des extrémités de sa trajectoire. La position et la vitesse sont alors données par les relations:



$$\vec{r} = \vec{A}\cos\omega t \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = -\vec{A}\omega \sin\omega t,$$

avec $A = 15$ cm et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6s} = 1{,}05\ s^{-1}$.

Par projection sur l'axe Ox, les relations ci-dessus deviennent:

$$x = A\cos\omega t \qquad \text{et} \qquad v_x = -A\omega\sin\omega t.$$

a) En $t = 0{,}5$ s, on a:

$$x = 15\text{ cm}.\cos\frac{2\pi}{6\text{ s}}.0{,}5\text{ s} = 15\text{ cm}.\cos\frac{\pi}{6} = 15\text{ cm}.\cos 30^\circ = 13{,}0\text{ cm}.$$

$$v_x = -15\text{ cm}.1{,}05\text{ s}^{-1}.\sin 30^\circ = -7{,}85\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Une demi seconde après son passage à une extrémité, le pendule en est distant de 2,0 cm et sa vitesse a une grandeur de 7,85 cm/s.

b) Lorsque le pendule a franchi 5 cm depuis une extrémité, on a:

$$x = 10\text{ cm} \qquad \text{et} \qquad \cos\omega t = \frac{x}{A} = \frac{10}{15} = 0{,}667$$

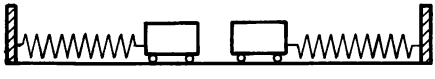
d'où $\omega t = 0{,}841$ rad $\quad (= 48{,}2^\circ)$

$$t = \frac{0{,}841\text{ rad}}{1{,}05\text{ s}^{-1}} = 0{,}803\text{ s}.$$

$$v_x = -15\text{ cm}.1{,}05\text{ s}^{-1}.\sin 0{,}841\text{ rad} = -11{,}7\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Il met donc 0,803 s pour atteindre le point considéré, et en ce point, sa vitesse a une grandeur de 11,7 cm/s.

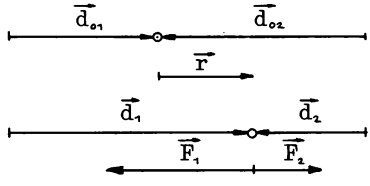
Exemple 4*: Deux wagonnets sont attachés à des ressorts et peuvent se mouvoir sur une voie horizontale. Leurs masses sont respectivement de 200 g et de 300 g. On observe qu'une force de 1 N produit un allongement de 0,8 cm pour le premier ressort, et de 1,0 cm pour le second. On tend les ressorts et on lie ensemble les wagonnets. Le système est-il un oscillateur harmonique ? Si oui, quelle est sa période d'oscillation ?



ΔΔΔ Soient m_1 et m_2 les masses des wagonnets, k_1 et k_2 les raideurs des ressorts. Lorsque le mobile (assimilé à un point) est à sa position d'équilibre, les ressorts subissent des déformations respectives $\vec{d}_{o1}$ et $\vec{d}_{o2}$, telles que la somme des forces qu'ils exercent est nulle.

$$-k_1\vec{d}_{o1} - k_2\vec{d}_{o2} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Lorsque le mobile a un écart $\vec{r}$, les ressorts ont des déformations $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ et exercent des forces



$$\vec{F}_1 = -k_1 \vec{d}_1 = -k_1 (\vec{d}_{o1} + \vec{r})$$

et $$\vec{F}_2 = -k_2 \vec{d}_2 = -k_2 (\vec{d}_{o2} + \vec{r}).$$

La résultante des forces que subit le mobile vaut (le poids et la force de soutien de la voie se compensant)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1 \vec{d}_{o1} - k_1 \vec{r} - k_2 \vec{d}_{o2} - k_2 \vec{r}.$$

Compte tenu de la relation (1), on a:

$$\vec{F} = -k_1 \vec{r} - k_2 \vec{r} = -(k_1 + k_2) \vec{r}.$$

C'est une force de rappel proportionnelle à l'écart. On en déduit que le système est un oscillateur harmonique. Sa constante de rappel vaut

$$k = k_1 + k_2.$$

Sa période d'oscillation est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1 + k_2}}.$$

Numériquement, on a:

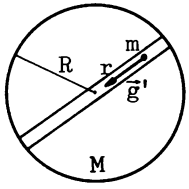
$$k_1 = \frac{1\ N}{0{,}8.10^{-2}\ m} = 1{,}25.10^2 \frac{N}{m} \qquad k_2 = \frac{1\ N}{10^{-2}\ m} = 10^2 \frac{N}{m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}5\ kg}{2{,}25.10^2\ Nm^{-1}}} = 2\pi \sqrt{0{,}222.10^{-2}\ s^2} = 0{,}296\ s.$$

N.B. Comme dans le cas de l'objet suspendu (§ 116) on remarque que la tension préalable des ressorts n'a aucune influence sur la constante de rappel.

Exemple 5*: On imagine un tunnel rectiligne traversant la terre selon un de ses diamètres. Un objet est lâché depuis un bout du tunnel. Arrive-t-il à l'autre bout ? Si oui, combien de temps met-il pour traverser la terre ?

ΔΔΔ Selon le résultat de l'exercice 2 du paragraphe 76, l'accélération de la pesanteur à une distance r du centre de la terre vaut:



$$g' = \frac{GMr}{R^3}$$

où M est la masse de la terre et R son rayon. Si les frottements sont négligeables, l'objet ne subit que la force de gravitation, qui a pour grandeur

$$F = mg' = \frac{GMmr}{R^3}.$$

Il s'agit d'une force de rappel, proportionnelle à l'écart (compté depuis le centre de la terre). L'objet a donc un mouvement harmonique. S'il est lâché depuis la surface de la terre, il parvient au même niveau, de l'autre côté. La constante de rappel vaut

$$k = \frac{F}{r} = \frac{GMm}{R^3}$$

et la période de l'oscillation

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

On remarque en passant qu'elle a la même valeur que la période de révolution d'un satellite qui décrit un cercle très voisin de la terre.

La durée t de la traversée du tunnel est égale à la moitié de la période d'oscillation.

$$t = \pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \pi \sqrt{\frac{(6{,}37.10^6\ m)^3}{6{,}67.10^{-11}\ Nm^2\,kg^{-2}.5{,}99.10^{24}\ kg}}$$

$$= 2530\ s \cong 42\ min.$$

Ce résultat est-il modifié si le tunnel ne passe pas par le centre de la terre ?

Exemple 6*: Dans un mouvement vibratoire amorti, on observe qu'à chaque oscillation, l'amplitude décroît de 20 %. La fréquence circulaire de cet oscillateur est-elle très inférieure à celle de l'oscillateur non amorti correspondant ?

ΔΔΔ Le rapport de deux élongations quelconques séparées par la durée d'une pseudo-période vaut

$$\frac{Ae^{-\delta(t+T)}\sin\omega(t+T)}{Ae^{-\delta t}\sin\omega t} = e^{-\delta T} = e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}}.$$

D'après la donnée, ce rapport vaut 80 % ou 0,8. On a donc

$$e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}} = 0,8$$

$$-\frac{2\pi\delta}{\omega} = \ln 0,8$$

d'où $$\delta = -\frac{\ln 0,8}{2\pi}\omega = \frac{0,223}{2\pi}\omega = 0,0355\,\omega.$$

La relation $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

fournit: $$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = \sqrt{\omega^2 + 0,00126\,\omega^2} = 1,00063\,\omega$$

ou $$\omega = 0,99937\,\omega_0.$$

L'amortissement a une influence minime sur la fréquence circulaire de l'oscillateur.

<u>Autres exemples d'oscillateurs harmoniques:</u> voir paragraphes 127 et 137.

Chapitre 21

SYSTEMES MATERIELS

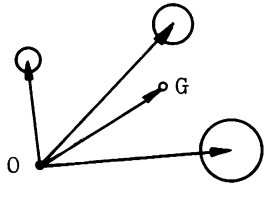
§ 121* Centre de masse

Nous appelons système matériel un ensemble quelconque de points matériels. Supposons qu'on puisse les numéroter: 1, 2, 3, ..., n. Soient m_i leurs masses respectives et $\vec{r}_i$ leurs vecteurs position, relativement à un référentiel arbitrairement choisi.

On introduit le centre de masse ou barycentre du système comme un point G occupant une position moyenne dans le système. On le définit par la condition suivante:

> Définition: Le vecteur position du centre de masse est la moyenne pondérée des vecteurs position des constituants du système.

Dans le calcul de cette moyenne, on donne à chaque vecteur position un coefficient égal à la masse du point matériel correspondant. On a ainsi:



$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

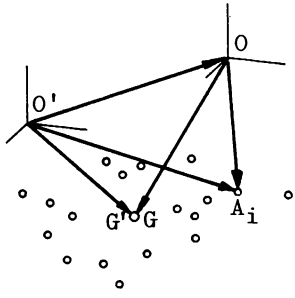
Nous noterons m la masse totale du système.

$$m = \sum m_i.$$

Pour le calcul effectif de la position du centre de masse, on a souvent intérêt à travailler avec les coordonnées des points du système. Par projection des vecteurs, la relation de définition fournit

$$x_G = \frac{1}{m}\sum m_i x_i \qquad y_G = \frac{1}{m}\sum m_i y_i \qquad z_G = \frac{1}{m}\sum m_i z_i$$

Que se passe-t-il lorsqu'on change de référentiel ? Le nouveau barycentre est défini par la condition:



$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{m}\sum m_i \overrightarrow{O'A_i}$$

A_i désigne le point où se trouve la masse m_i. On a alors:

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{m}\sum m_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i})$$

$$= \frac{1}{m}.\overrightarrow{O'O}\sum m_i + \frac{1}{m}\sum m_i \overrightarrow{OA_i}$$

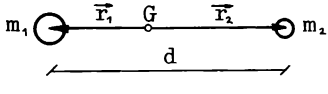
$$= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G},$$

ce qui prouve que les points G' et G coïncident. On constate que le barycentre d'un système matériel est indépendant du référentiel choisi.

Si l'origine du référentiel est placée au barycentre, $\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{0}$ et

$$\sum m_i \overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{0}.$$

A titre d'exemple, déterminons la position du barycentre du système composé par deux masses m_1 et m_2, séparées par une distance d. On a:



$$m_1 \overrightarrow{r_1} + m_2 \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{0}.$$

Cette relation montre que les vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ sont parallèles et de sens contraires. Le barycentre se trouve donc sur la droite joignant les deux masses, entre elles. De plus, on a:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Les distances du barycentre aux deux masses sont inversement proportionnelles à celles-ci. En outre, on a:

$$r_1 + r_2 = d \qquad \text{ou} \qquad r_1 + \frac{m_1 r_1}{m_2} = d.$$

On en déduit: $m_2 r_1 + m_1 r_1 = m_2 d$

$$r_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}.$$

On obtient de façon analogue

$$r_2 = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2}.$$

Pour $m_1 = 2$ kg et $m_2 = 3$ kg, par exemple, on aurait

$$r_1 = \frac{3}{5} d \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{2}{5} d.$$

Considérons un corps étendu, dans le champ de la pesanteur. On peut le considérer comme un ensemble de particules de masses m_i. Chacune d'elle a un poids

$$\vec{p}_i = m_i \vec{g}.$$

La somme de tous ces poids élémentaires est le poids du corps.

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{g} = (\sum m_i)\vec{g} = m\vec{g}.$$

De façon générale, on pourra remplacer l'ensemble des poids $\vec{p}_i$ par un poids unique $\vec{p}$, s'il est possible de trouver à celui-ci un point d'application, tel que son moment soit égal à la somme des moments des $\vec{p}_i$. Or

$$\sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{g} = (\sum m_i \vec{r}_i) \wedge \vec{g} = m\vec{r}_G \wedge \vec{g} = \vec{r}_G \wedge m\vec{g}.$$

On constate que la somme des moments des poids élémentaires est égal au moment du poids total, placé au centre de masse du corps. On peut donc considérer le poids du corps comme appliqué au centre de masse. Ce fait vaut à ce point le nom de centre de gravité (§ 50).

Soit Oz un axe vertical orienté vers le haut. L'énergie potentielle d'une particule de masse m_i est

$$m_i g z_i.$$

L'énergie potentielle totale vaut

$$E_p = \sum m_i g z_i = g \sum m_i z_i = g m z_G = m g z_G.$$

m est la masse totale du corps et z_G est l'altitude de son centre de gravité. L'énergie potentielle d'un corps étendu, dans le champ de la pesanteur est donc celle qu'il aurait si toute sa masse était placée en son centre de gravité.

Or c'est une règle générale de la physique (découlant de la définition de l'énergie potentielle) que les forces agissent toujours dans le sens d'une diminution de l'énergie potentielle. L'effet de la pesanteur sur un corps étendu est donc toujours de faire descendre son centre de gravité (§ 54).

§ 122* Théorème du centre de masse

Selon le paragraphe précédent, le vecteur position du centre de masse d'un système matériel est donné par la relation:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{r}_i .$$

Dérivons deux fois de suite par rapport au temps les deux membres de cette égalité. A gauche, nous obtenons la vitesse et l'accélération du centre de masse. A droite, en utilisant les propriétés de linéarité de la dérivation (dérivée d'une combinaison linéaire de fonction = combinaison linéaire des dérivées des fonctions), nous obtenons des moyennes pondérées des vitesses et des accélérations:

$$\vec{v}_G = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad \vec{a}_G = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{a}_i . \qquad (2)$$

Chaque particule du système peut subir des forces intérieures (c'est-à-dire exercées par d'autres particules du système, voir § 48) et des forces extérieures (exercées par des agents extérieurs au système). Désignons par $\vec{F}_i$ la somme des forces extérieures et par $\vec{F}_{i,int}$ la somme des forces intérieures, qui s'exercent sur la i-ème particule. Appliquons l'équation de Newton à chaque particule.

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{i,int} = m_i \vec{a}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Additionnons membre à membre toutes ces équations.

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{i,int} = \sum m_i \vec{a}_i$$

La seconde somme représente la somme de toutes les forces intérieures du système. Elle est nulle, d'après le premier théorème des forces intérieures (§ 48). Le second membre est égal à $m\vec{a}_G$, d'après l'équation (2). On a donc:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_G .}$$

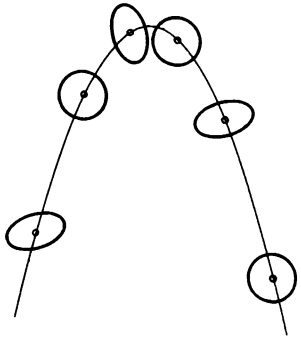
Cette équation a la forme de l'équation de Newton. On peut conclure:

> Théorème du centre de masse: L'équation de Newton peut s'appliquer de façon globale à un système matériel quelconque, pour autant qu'on prenne en considération la somme des forces extérieures, la masse totale du système et l'accélération de son centre de masse.

L'équation de Newton est la loi qui détermine le mouvement d'un point matériel (lorsqu'on connaît sa position et sa vitesse initiales, de même que les forces qui s'exercent sur lui). On voit ici que la même équation détermine le mouvement du centre de masse d'un système. On peut donc dire que le barycentre d'un système se meut comme un point matériel possédant la masse totale du système et auquel serait appliquée la somme des forces extérieures qui agissent sur lui.

Ce théorème justifie les nombreuses applications que nous avons faites de l'équation de Newton à des objets qui ne sont pas des points matériels. En prenant la masse de l'objet et la somme des forces qui s'exercent sur lui, on trouve l'accélération de son barycentre.

Lorsqu'un objet étendu, rigide ou souple, est lancé en l'air les seules forces extérieures qu'il subit (si la résistance de l'air est négligeable) sont les poids de ses diverses parties. Leur somme est le poids total de l'objet.



$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{g} = m\vec{g}.$$

Le théorème du centre de masse fournit alors:

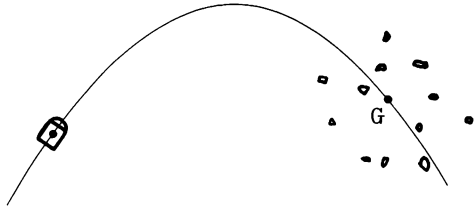
$$m\vec{g} = m\vec{a}_G$$

d'où: $$\vec{a}_G = \vec{g}.$$

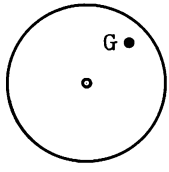
Le barycentre du système a l'accélération $\vec{g}$, et par conséquent décrit une parabole d'axe vertical, ou dans le cas limite une droite verticale.

Imaginons un obus se déplaçant à une altitude telle que le frottement de l'air soit négligeable, et supposons que cet obus explose. Au moment de l'explosion, d'importantes forces intérieures apparaissent et font partir des éclats dans tou-

tes les directions. Toutefois, les forces gravifiques sont les seules forces extérieures qui s'exercent sur le système. Le mouvement du centre de masse de l'obus n'est donc nullement influencé par l'explosion. Après l'explosion, ce point suit la même trajectoire parabolique qu'avant.



Dans son mouvement annuel autour du soleil, la terre emmène la lune avec elle. Ce n'est pas le centre de la terre qui décrit une ellipse autour du soleil, c'est le centre de masse du système terre-lune. Ce point est situé environ aux trois quarts de la distance entre le centre de la terre et sa surface. C'est autour de lui que la terre et la lune tournent en vingt-huit jours. (Voir § 126).



§ 123* Théorème du moment cinétique

Le moment cinétique d'une particule de masse m_i et de vitesse $\vec{v}_i$ est le moment de sa quantité de mouvement (voir § 111).

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i.$$

Il dépend essentiellement de l'origine O choisie. Le moment cinétique d'un système matériel est la somme des moments cinétiques des particules qui le composent.

$$\vec{L} = \sum\vec{L}_i = \sum\vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i.$$

Soient, comme au paragraphe précédent, $\vec{F}_i$ la somme des forces extérieures qui s'exercent sur la i-ème particule, et $\vec{F}_{i,int}$ la somme des forces intérieures qui s'exercent sur celle-ci. Soient $\vec{M}_i$ et $\vec{M}_{i,int}$ les moments de ces deux forces, relativement à l'origine O. Appliquons à chaque particule du système le théorème du moment cinétique établi au paragraphe 111.

$$\vec{M}_i + \vec{M}_{i,int} = \frac{d\vec{L}_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Additionnons membre à membre toutes ces équations.

$$\sum \vec{M}_i + \sum \vec{M}_{i,int} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}.$$

La seconde somme est la somme des moments des forces intérieures. Elle est nulle d'après le second théorème des forces intérieures (§ 48). Au second membre, on peut permuter les opérations de sommation et de dérivation. On obtient alors:

$$\sum \vec{M}_i = \frac{d}{dt} \sum \vec{L}_i$$

ou

$$\boxed{\sum \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}.}$$

Théorème du moment cinétique: La dérivée du moment cinétique d'un système matériel par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces extérieures qui s'exercent sur lui.

Nous étudierons deux applications très importantes de ce théorème. L'une concerne le cas où le système matériel est isolé (§ 125), l'autre, le cas où il est rigide (§ 134).

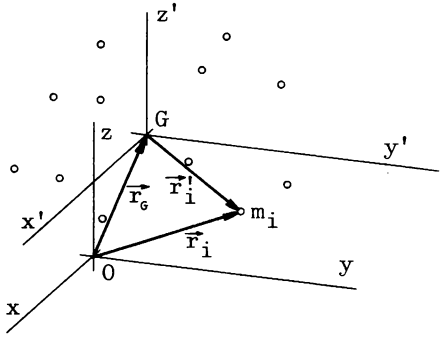
En principe, les lois de la mécanique ne sont valables que lorsque les mouvements sont étudiés depuis un référentiel galiléen. Dans l'établissement du théorème du moment cinétique, les moments

$$\vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \text{et} \qquad \vec{r} \wedge \vec{p}$$

sont relatifs à l'origine d'un référentiel galiléen. Si on calcule ces moments relativement à un autre point, on s'expose à ce que le théorème perde sa validité. On peut toutefois démontrer que le théorème du moment cinétique est encore valable si les moments sont calculés par rapport au barycentre du système, même si ce point est accéléré relativement aux référentiels d'inertie.

§ 124* Energie d'un système

Soit un référentiel galiléen Oxyz et un système matériel quelconque. Nous définissons un second référentiel Gx'y'z' ayant pour origine le barycentre du système et ayant des axes parallèles au premier. Nous appellerons Gx'y'z' référentiel du barycentre. Ce référentiel est galiléen ou non suivant que le barycentre est accéléré ou non relativement à Oxyz. Les vecteurs position d'une particule sont liés par la relation:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{r}'_i .$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve la relation entre les vitesses de la particule:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}'_i .$$

L'énergie cinétique totale du système, relativement au référentiel Oxyz est

$$E_c = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}'_i)^2$$

$$= \sum \tfrac{1}{2} m_i v_G^2 + \sum m_i \vec{v}_G \vec{v}'_i + \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \vec{v}_G \sum m_i \vec{v}'_i + \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Le premier terme peut s'interpréter comme l'énergie qu'aurait le barycentre s'il portait la masse totale du système. La somme qui apparaît au second terme est nulle. En effet, c'est la dérivée de

$$\sum m_i \vec{r}'_i .$$

Or cette expression est nulle puisque les vecteurs position $\vec{r}'_i$ ont leur origine au barycentre. La somme qui constitue le troisième terme est l'énergie cinétique du système, vue depuis le référentiel du barycentre. On a donc:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + E_{c,G}$$

Théorème: L'énergie cinétique d'un système, est égale à l'énergie cinétique qu'aurait son barycentre si toute la masse y était concentrée, plus l'énergie cinétique du système vue depuis le référentiel du barycentre.

§ 125* Systèmes isolés

Définition: Un système est dit isolé si aucun de ses constituants ne subit de force provenant d'un agent extérieur au système.

On pourrait énoncer aussi: Un système est isolé s'il ne subit aucune force extérieure. En toute rigueur, de tels systèmes n'existent pas. Un système matériel subit toujours des forces extérieures, il y a toujours au moins les forces gravifiques exercées par les corps qui sont en dehors du système. Néanmoins, il existe beaucoup de cas où les forces extérieures peuvent être laissées de côté et où un système peut être considéré comme isolé. Il en est ainsi lorsque les forces extérieures sont négligeables vis-à-vis des forces intérieures - par exemple dans les chocs - ou lorsque les forces extérieures se compensent.

Appliquons le théorème du centre de masse à un système isolé. La somme des forces extérieures étant nulle, on conclut que l'accélération du barycentre est nulle.

> Théorème: Le barycentre d'un système isolé a une vitesse constante.

On peut donc toujours attacher l'origine d'un référentiel d'inertie au barycentre d'un système isolé. Relativement à ce référentiel, appelé référentiel du barycentre, l'étude des mouvements du système est particulièrement commode.

Lorsqu'on dérive l'expression qui définit le centre de masse, (voir § 122), on établit la relation:

$$\vec{v}_G = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i .$$

Nous venons d'établir que dans un système isolé, la vitesse du centre de masse est constante. On en déduit:

$$\boxed{\sum m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{\text{constante}}.}$$

> Loi de conservation de la quantité de mouvement: Dans un système isolé, la quantité de mouvement totale est constante.

C'est la loi postulée au début de la dynamique, au paragraphe 34, et utilisée un grand nombre de fois depuis lors, notamment dans les problèmes de chocs.

Appliquons le théorème du moment cinétique à un système isolé. La somme des moments des forces extérieures est nulle. La dérivée du moment cinétique est donc nulle, ce qui implique que le moment cinétique est constant.

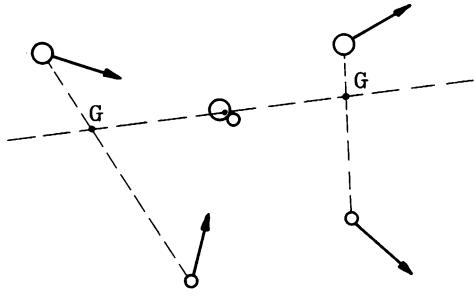
$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Loi de conservation du moment cinétique: Dans un système isolé, le moment cinétique total est constant.

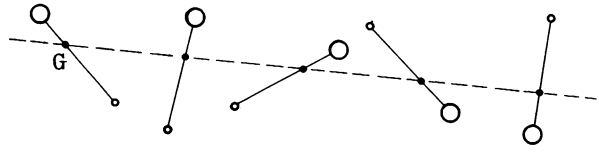
Cette loi se situe au même niveau que la précédente. En physique nucléaire, les moments cinétiques des particules jouent un rôle important. Cette loi de conservation du moment cinétique est aussi utile que la loi de conservation de la quantité de mouvement.

Mentionnons deux exemples de systèmes isolés, illustrant les règles établies ici.

Lorsque deux objets se heurtent, ils exercent l'un sur l'autre de très grandes forces pendant un temps très court. Ils constituent un système dans lequel les forces extérieures sont le plus souvent négligeables vis-à-vis des forces intérieures. Ainsi, même si les forces extérieures ne sont pas nulles, on peut considérer le système comme isolé pendant le choc. Et son centre de gravité a, pendant ce temps, un mouvement rectiligne et uniforme.



Les molécules d'un gaz, entre les chocs qu'elles subissent, peuvent être considérées comme des corps libres, c'est-à-dire ne subissant pas de forces extérieures. Entre deux chocs, le centre de gravité d'une molécule décrit donc un segment de droite. A ce mouvement, il peut fort bien se superposer une rotation de la molécule sur elle-même. Comme nous le verrons plus loin, la conservation du moment cinétique implique alors que la vitesse angulaire de la molécule est constante.



Les deux paragraphes suivants présentent encore d'autres exemples de systèmes isolés.

§ 126* Satellite

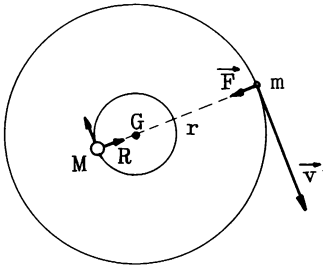
Au paragraphe 74, nous avons étudié le mouvement d'un satellite tournant autour d'un astre. Nous avions alors supposé l'astre immobile, ce qui est une hypothèse valable si la masse du satellite est beaucoup plus petite que celle de l'astre autour duquel il tourne. Nous allons maintenant traiter le problème de façon plus générale.

Considérons deux corps de masses m et M n'exerçant l'un sur l'autre aucune autre force que l'attraction gravifique et constituant un système isolé. Cette dernière hypothèse permet d'affirmer que le barycentre de ces deux corps est en mouvement rectiligne uniforme et peut être considéré comme l'origine d'un référentiel d'inertie, que nous appelons référentiel du barycentre. C'est dans celui-ci que nous étudions le mouvement des deux mobiles.

Désignons par d la distance des deux corps, et par r et R leurs distances au barycentre. Selon un résultat établi au paragraphe 121, on a:

$$r = \frac{Md}{m + M} \qquad \text{et} \qquad R = \frac{md}{m + M}.$$

La force qui sollicite chaque mobile est toujours dirigée vers le barycentre du système. On a donc affaire à des mouvements centraux (§ 112), et par conséquent les trajectoires sont planes. Supposons, ce qui est évidemment une restriction dans les mouvements possibles des mobiles, que leur distance d ne varie pas au cours du temps. Les égalités ci-dessus montrent alors que la distance de chacun d'eux à l'origine est fixe. Comme les trajectoires sont planes, on conclut que ce sont des cercles.



Les deux corps ont la même période de révolution. Calculons celle-ci en portant notre attention sur l'un des mobiles, celui qui a une masse m, par exemple. La seule force qu'il subit est une force de gravitation dont la grandeur est

$$F = \frac{GMm}{d^2}.$$

Cette force est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire. L'accélération a la même direction, d'après l'équation de Newton. L'accélération étant perpendiculaire à la vitesse, on déduit que le mouvement est

uniforme. L'équation de Newton permet de calculer l'accélération.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{d^2}.$$

Puisque le mouvement est circulaire uniforme, l'accélération vaut $a = v^2/r$, où v est la vitesse du mobile. On peut donc écrire:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{d^2} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{1}{d}\sqrt{GMr}.$$

Le temps de révolution T est lié à la vitesse v et à la longueur de la trajectoire par la relation $s = vT$, valable dans les mouvements uniformes. Il vaut donc:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi rd}{\sqrt{GMr}} = 2\pi d\sqrt{\frac{r}{GM}}.$$

En remplaçant r par sa valeur, on trouve:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(m + M)}}.$$

Comme il se doit, cette formule est symétrique relativement aux deux masses. Dans le cas particulier où m est négligeable devant M, elle fournit le résultat que nous avons établi au paragraphe 74.

§ 127* Oscillateur double

Nous voulons étudier le mouvement de deux masses m et M liées l'une à l'autre par un ressort de constante k. Nous supposons qu'aucune force extérieure n'agit sur le système et que le ressort a une masse négligeable.

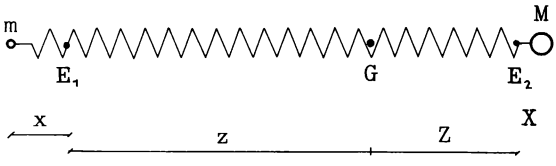
Le système étant isolé, nous pouvons affirmer que son barycentre a un mouvement rectiligne et uniforme. Choisissons un référentiel d'inertie dans lequel le barycentre est immobile.

Lorsque le ressort est détendu, les masses se trouvent à des distances du barycentre que nous désignons par z et Z respectivement. D'après un résultat du paragraphe 121, ces grandeurs sont liées par l'égalité:

$$mz = MZ.$$

Comme mouvements possibles des masses, nous n'envisageons que les déplacements rectilignes. Désignons par x et X la distance

entre les masses et leurs positions d'équilibre E_1 et E_2. Ces grandeurs sont telles que



$$m(z + x) = M(Z + X).$$

Des deux égalités précédentes, on déduit que les écarts des mobiles sont liés aux masses par la relation

$$mx = MX. \qquad (1)$$

Le dessin évoque la situation où le ressort a été étiré. Toutefois, on peut s'assurer que la relation (1) est valable aussi bien quand il est comprimé que lorsqu'il est étiré.

Les forces de rappel que le ressort exerce sur les mobiles ont pour grandeur le produit de la constante du ressort par sa déformation:

$$F = k(x + X). \qquad (2)$$

Pour chaque masse, exprimons la force de rappel en fonction de l'écart. Les relations (1) et (2) fournissent alors, par élimination de **X** ou de x:

$$F = k\left(1 + \frac{m}{M}\right)x \qquad \text{et} \qquad F = k\left(1 + \frac{M}{m}\right)X.$$

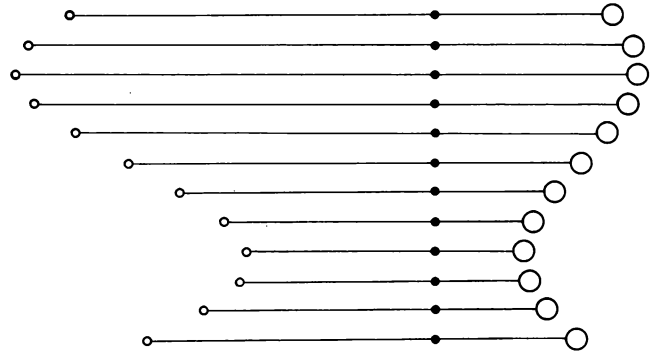
On voit que, pour chaque mobile, la force de rappel est proportionnelle à l'écart. On a donc deux oscillateurs harmoniques (§ 115). Les constantes de rappel et les périodes valent respectivement:

Pour la masse m: Pour la masse M:

$$k_1 = k\left(1 + \frac{m}{M}\right), \qquad k_2 = k\left(1 + \frac{M}{m}\right),$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m + M)}}. \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m + M)}}.$$

La période des deux oscillations est la même, comme on pouvait s'y attendre. Le centre de masse du système étant immobile, les mouvements des deux corps sont nécessairement synchronisés. Le schéma ci-dessous indique quelques états successifs de l'oscillateur.



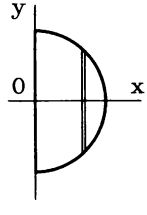
Dans le cas particulier où l'une des masses est beaucoup plus grande que l'autre, par exemple $M \gg m$, la plus grande coïncide à peu près avec le centre de masse. Elle est donc presque immobile. Dans l'expression de la période, m peut être négligé lorsqu'il apparaît comme un terme à additionner à M. La période de l'oscillation vaut alors:

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{mM}{kM}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

§ 128* Exemples de calcul

Exemple 1*: Déterminer le barycentre d'une demi-sphère pleine, de rayon R.

△△△ Plaçons un système d'axes comme l'indique la figure. Dans le plan Oxy, la trace de l'hémisphère a pour équation



$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Par la pensée, découpons l'hémisphère en tranches minces, d'épaisseur dx, par des plans perpendiculaires à Ox. Si ρ est la masse volumique de la matière constituant l'objet, la masse d'une tranche vaut

$$dm = \rho dV = \rho\pi y^2 dx = \rho\pi(R^2 - x^2)dx.$$

La relation

$$x_G = \frac{1}{m}\sum m_i x_i$$

peut s'écrire, avec les notations du calcul intégral:

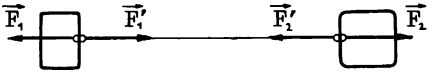
$$x_G = \frac{1}{m}\int_0^R x\,dm = \frac{3}{2\pi R^3 \rho}\int_0^R \rho\pi(R^2 x - x^3)\,dx$$

$$= \frac{3}{2R^3}\left[\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^R = \frac{3}{2R^3}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{3R}{8}.$$

Par raison de symétrie, le barycentre se trouve sur l'axe Ox. Il est à une distance 3R/8 du centre de la sphère.

Exemple 2*: Un fil est lié à deux objets. Les forces qu'il exerce sur ces objets sont-elles inconditionnellement de même grandeur ?

ΔΔΔ Le fil subit trois forces extérieures: $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ de la part des objets auxquels il est lié et son poids $m\vec{g}$. Appliquons-lui le théorème du centre de masse



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_G.$$

Si la masse du fil est très petite, les termes $m\vec{g}$ et $m\vec{a}_G$ sont négligeables devant $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et on a:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad F_1 = F_2.$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, on a:

$$F_1 = F_1' \qquad \text{et} \qquad F_2 = F_2'.$$

On en déduit: $F_1' = F_2'$.

En conclusion, si la masse du fil est très petite les forces qu'il exerce sur les objets auxquels il est lié sont de même grandeur.

Exemple 3*: Un couple est appliqué à un corps solide. Quel est son effet sur le mouvement du centre de masse de celui-ci ?

ΔΔΔ Un couple (§ 51) est composé de deux forces dont la somme est nulle. D'après le théorème du centre de masse, on a:

$$\vec{a}_G = \vec{0}.$$

Un couple n'a donc aucun effet sur le mouvement du barycentre.

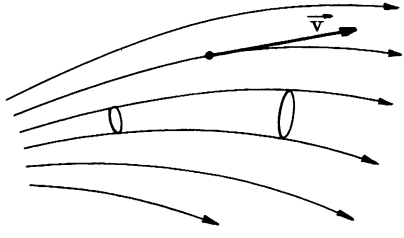
Chapitre 22

DYNAMIQUE DES FLUIDES

§ 129* Equation de Bernoulli

Nous avons traité précédemment les sujets de la statique des fluides (§§ 56 - 64) et du frottement dans un fluide (§§ 68 - 70). Ils sont supposés connus.

Si, dans un fluide en mouvement, la vitesse en un point est fixe - c'est-à-dire est la même pour tous les éléments de fluide qui passent en ce point - l'écoulement est dit stationnaire. (Cette notion est pratiquement équivalente à celle d'écoulement laminaire.) Les particules de fluide décrivent alors des lignes stables qu'on appelle lignes de courant. En chaque point du fluide, la vitesse est tangente à la ligne de courant. L'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée constitue un tube de courant.



Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique ρ est indépendante de sa pression. Les liquides sont pratiquement incompressibles.

Rappelons que la viscosité d'un fluide est, en substance, le frottement de glissement d'une couche de fluide sur sa voisine. Grâce à la viscosité, une portion de fluide en mouvement entraîne les portions voisines. Lorsque la viscosité est négligeable, les forces exercées sur une portion de fluide par son entourage sont partout perpendiculaires à sa surface.

Dans ce chapitre, nous ne traiterons que d'écoulements stationnaires, dans des fluides incompressibles et non visqueux.

Calculons le débit de fluide à travers une section droite d'un tube de courant. Pendant un intervalle de temps arbitraire Δt, il passe à travers cette section un cylindre de fluide dont la hauteur vaut $v\Delta t$, l'aire de base S, et le volume $Sv\Delta t$. Le

débit à travers la section est le volume de fluide qui la traverse par unité de temps. Il vaut:

$$D = \frac{Sv\Delta t}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{D = Sv.}$$

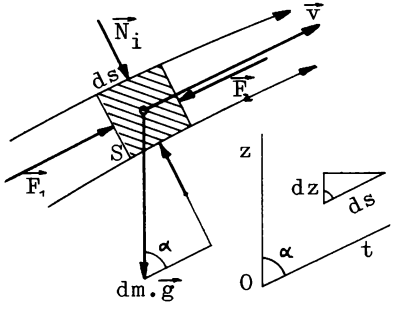
Considérons un tube de courant et deux sections droites d'aires S_1 et S_2. Le volume de fluide qui se trouve dans le tube entre les deux sections est toujours le même. Comme le fluide est supposé incompressible, le volume qui, par unité de temps, entre dans cet espace, est égal à celui qui en sort. En d'autres termes, les débits à travers les deux sections sont égaux.

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2 .}$$

C'est l'<u>équation de continuité.</u>

A l'intérieur d'un petit tube de courant, considérons une portion de fluide comprise entre deux sections droites très rapprochées. Nous désignons par S sa base et par ds sa hauteur. Sa masse vaut

$$dm = \rho S ds.$$



Elle subit des forces de la part du fluide environnant. Comme la viscosité est supposée nulle, toutes ces forces sont normales aux surfaces, et ne sont imputables qu'à la pression. On peut distinguer des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées par le fluide qui est respectivement derrière et devant la portion considérée, et des forces latérales $\vec{N}_i$. Appliquons-lui l'équation de Newton (ou le théorème du centre de masse).

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \sum \vec{N}_i + dm.\vec{g} = dm.\vec{a}.$$

Projetons tous ces vecteurs sur l'axe tangentiel Ot (axe parallèle à la vitesse, et de même sens). L'équation devient:

$$F_1 - F_2 + 0 - dm.g \cos\alpha = dm.a_t. \qquad (1)$$

Les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ peuvent être mises en relation avec les pressions p_1 et p_2 régnant respectivement derrière et devant la portion de fluide. On a:

$$F_1 - F_2 = p_1 S - p_2 S = S(p_1 - p_2) = -S(p_2 - p_1) = -Sdp.$$

dp représente la variation de pression relative au tronçon ds. D'autre part, l'accélération tangentielle est toujours égale à la dérivée de la norme de la vitesse, par rapport au temps (§ 19). L'équation (1) peut s'écrire:

$$-Sdp - \rho Sds.g \cos\alpha = \rho Sds.\frac{dv}{dt}. \qquad (2)$$

On peut remarquer que $ds.\cos\alpha$ est égal à l'accroissement d'altitude dz du fluide sur le tronçon considéré. On a donc, après simplification par S:

$$-dp - \rho gdz = \rho ds.\frac{dv}{dt}. \qquad (3)$$

De plus, on peut écrire:

$$ds.\frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}.dv = v.dv = d(\tfrac{1}{2}v^2).$$

L'équation (3) devient alors, après une transposition des termes:

$$\rho d(\tfrac{1}{2}v^2) + \rho gdz + dp = 0.$$

ρ et g étant supposés constants, on a:

$$d(\tfrac{1}{2}\rho v^2) + d(\rho gz) + dp = 0$$

et

$$d(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p) = 0.$$

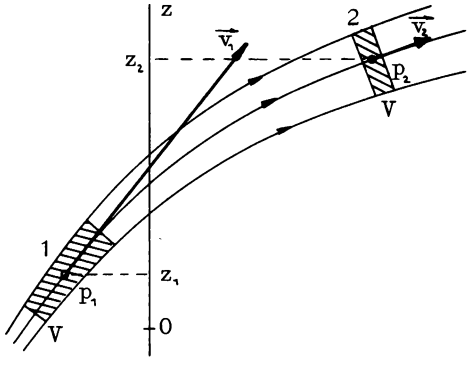
Sur le tronçon ds envisagé, la variation de la quantité entre parenthèses est donc nulle. On en conclut que cette quantité est constante le long d'une ligne de courant. Ce résultat fondamental est connu sous le nom d'<u>équation de Bernoulli.</u>

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \text{constante}$$

A chaque point du fluide en mouvement correspond une vitesse d'écoulement v, une pression p et une altitude z. L'équation de Bernoulli montre comment sont liées ces trois grandeurs, le long d'une ligne de courant. Elle est valable pour un écoulement stationnaire, dans un fluide incompressible et non visqueux. En approximation, on peut aussi l'utiliser lorsque ces

conditions idéales ne sont pas rigoureusement remplies, par exemple pour un fluide de viscosité faible, et de masse volumique à peu près constante, en des points appartenant à des lignes de courant voisines.

Considérons une petite portion de fluide, de volume V, remplissant un petit bout de tube de courant, autour d'un point 1. Elle a une pression p_1, une vitesse $\vec{v}_1$ et une altitude z_1. Un instant après, cette portion de fluide se trouve autour d'un point 2, avec une pression p_2, une vitesse $\vec{v}_2$ et une altitude z_2. Son volume V n'a pas changé, puisque le fluide est supposé incompressible. L'équation de Bernoulli fournit:



$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2. \qquad (4)$$

Multiplions chaque terme par le volume V. En remarquant que ρV est la masse de la portion de fluide considérée, on a:

$$\tfrac{1}{2}m v_1^2 + mgz_1 + p_1 V = \tfrac{1}{2}m v_2^2 + mgz_2 + p_2 V. \qquad (5)$$

C'est une équation de conservation de l'énergie mécanique. Dans chaque membre, le premier terme est l'énergie cinétique de la portion de fluide. Le deuxième est son énergie potentielle dans le champ de la pesanteur. Le troisième doit être interprété comme une énergie potentielle associée au champ de pression. Un objet de volume V placé dans un fluide où règne une pression p a une énergie potentielle pV.

Revenons à l'équation (4). Chaque terme s'obtient en divisant par V les termes de l'équation (5). Ils représentent donc des énergies par unité de volume, c'est-à-dire des densités d'énergie. $\frac{1}{2}\rho v^2$ est la densité d'énergie cinétique, ρgz est la densité d'énergie potentielle gravifique, et p la densité d'énergie potentielle associée à la pression. L'équation de Bernoulli apparaît donc comme une forme de la loi de conservation de l'énergie.

Dans le cas particulier de la statique, la vitesse du fluide est partout nulle. L'équation de Bernoulli prend la forme

$$\rho gz + p = \text{constante}.$$

On en tire

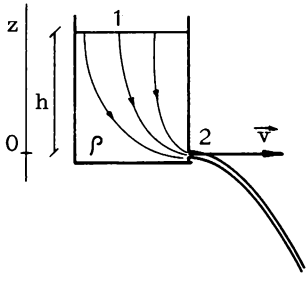
$$\rho g dz + dp = 0 \qquad \text{et} \qquad dp = -\rho g dz.$$

C'est la loi de croissance de la pression (§ 58).

§ 130* Applications

1. Formule d'écoulement de Torricelli

Un récipient contient un liquide de masse volumique ρ. A une hauteur h au-dessous de la surface libre, le liquide s'échappe par un orifice. Les lignes de courant vont de la surface libre à l'orifice. Appliquons l'équation de Bernoulli entre l'origine d'une ligne de courant (point 1) et l'orifice (point 2). En ces deux points la pression est égale à la pression atmosphérique b. Au point 1, la vitesse est pratiquement nulle. On a donc:



$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2$$

$$0 + \rho g h + b = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + 0 + b.$$

La vitesse d'écoulement du liquide est donc:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

C'est la même vitesse que celle qu'acquiert un objet qui tombe en chute libre d'une hauteur h (§ 94, Ex.2).

2. Etranglement dans un tuyau

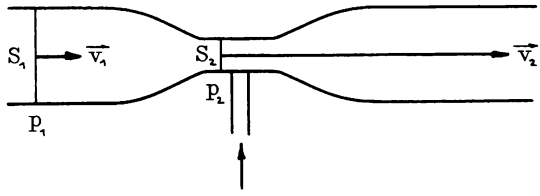
Lorsque les lignes de courant restent pratiquement à la même altitude, ou que l'influence de la pesanteur est négligeable, l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{constante}.$$

Cela signifie que, le long d'une ligne de courant, si la vitesse du fluide augmente, sa pression diminue.

Cette situation est réalisée, par exemple, lorsqu'un fluide circulant dans un tuyau passe par un étranglement. Soient S_1 la section initiale du tuyau et S_2 celle de l'étranglement, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ les vitesses, et p_1 et p_2 les pressions correspondantes.

D'après l'équation de continuité, la vitesse est inversement proportionnelle à la section:



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Si l'étranglement est très marqué ($S_2 \ll S_1$), la vitesse y devient très grande ($v_2 \gg v_1$).

L'équation de Bernoulli fournit:

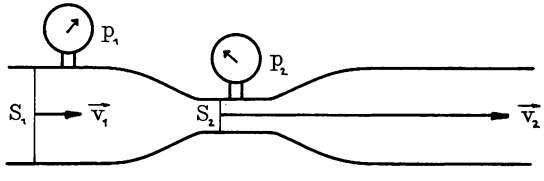
$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \qquad \text{d'où} \qquad p_2 = p_1 - \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2).$$

Si le terme $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ est assez grand, la pression p_2 dans l'étranglement peut devenir très petite. A l'extrémité d'un tuyau latéral débouchant dans l'étranglement, la pression vaut p_2. Un fluide, de l'air par exemple, se trouvant dans ce tuyau latéral est aspiré et entraîné par le courant. Un tel système peut donc servir de pompe. C'est le principe de la trompe à eau.

§ 131* Exemples de calcul

Exemple 1: Jauge de Venturi. Pour mesurer le débit d'eau dans un tuyau de section S_1, on réalise un étranglement de section S_2. Des manomètres placés avant l'étranglement et à celui-ci mesurent des pressions p_1 et p_2. Calculer le débit. Application numérique: $S_1 = 10$ cm²; $S_2 = 4$ cm²; $p = 3$ at; $p = 2$ at.

△△△ L'équation de Bernoulli fournit:



$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}.$$

D'après l'équation de continuité

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

on a:

$$\frac{S_1^2 v_1^2}{S_2^2} - v_1^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}$$

et

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Le débit d'eau est donc:

$$D = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Numériquement, on a:

$S_1 S_2 = 10\ cm^2 . 4\ cm^2 = 4.10^{-7}\ m^4$

$p_1 - p_2 = 3\ at - 2\ at = 1\ at \cong 10^5\ Nm^{-2}$

$S_1^2 - S_2^2 = 100\ cm^4 - 16\ cm^4 = 84\ cm^4 = 8,4.10^{-7}\ m^4$

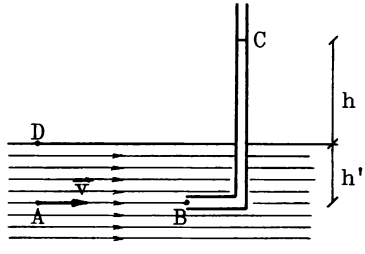
$$D = 4.10^{-7}\ m^4 \sqrt{\frac{2.10^5\ Nm^{-2}}{10^3\ kgm^{-3}.8,4.10^{-7}\ m^4}} = 4.10^{-7}\ m^4 . 1,54.10^4\ m^{-1}s^{-1}$$

$$D = 6,2.10^{-3}\ \frac{m^3}{s} = 6,2\ \frac{dm^3}{s}.$$

Cet exemple met en évidence un principe classique de mesure des débits.

Exemple 2: Sonde de Pitot. Dans une rivière coulant à une vitesse $\vec{v}$, on place un tuyau en forme d'équerre. L'une des branches est verticale et sort de l'eau. L'autre branche est horizontale et orientée contre le courant. Dans le tube vertical, l'eau s'élève d'une hauteur h au-dessus du niveau de la rivière. Quelle relation y a-t-il entre h et v ?

△△△ Appliquons l'équation de Bernoulli à une ligne de courant située à peu près dans l'axe de la partie horizontale du tube. En un point A éloigné du tube, le liquide a la vitesse $\vec{v}$. En un point B, situé à l'extrémité du tube, la vitesse est pratiquement nulle. On a donc:



$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = p_B. \qquad (1)$$

Cette équation montre que la pression à l'ouverture du tube est supérieure à la pression qui règne dans le fluide aux autres points de même altitude. Soit C un point au sommet de la colonne de liquide dans le tube et D un point à la surface du liquide. En ces points, la pression est égale à la pression atmosphérique b. La loi de croissance de la pression appliquée entre les points A et D d'une part, B et C d'autre part, fournit:

$$p_A - b = \rho g h' \qquad p_B - b = \rho g (h' + h)$$

$$p_A = b + \rho g h' \qquad p_B = b + \rho g (h' + h).$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient:

$$b + \rho g h' + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = b + \rho g h' + \rho g h$$

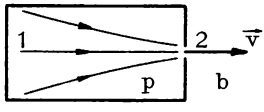
$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h$$

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Ce dispositif met en évidence une technique de mesure de la vitesse d'un fluide. La colonne verticale peut évidemment être remplacée par un manomètre.

Exemple 3: Un récipient contient un gaz dont la masse volumique vaut 0,5 kg/m³. Sa pression au-dessus de la pression atmosphérique vaut 1 cm Hg. Ce gaz s'échappe à l'air libre par une ouverture. Quelle est sa vitesse d'effusion ?

△△△ Soient b la pression atmosphérique, p la pression du gaz, ρ sa masse volumique et v la vitesse cherchée. L'effet de la pesanteur est négligeable. On considère une ligne de courant allant depuis le fond du récipient jusqu'à l'orifice. La vitesse initiale du gaz est négligeable. L'équation de Bernoulli fournit:



$$p = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + b$$

d'où
$$v = \sqrt{\frac{2(p - b)}{\rho}}. \qquad (1)$$

Numériquement, on a:

$$p - b = 1 \text{ cm Hg} = 13{,}6.10^3 \frac{kg}{m^3}.10 \frac{m}{s^2}.10^{-2} \text{ m} \cong 1400 \frac{kg}{ms^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2.1400 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2}}{0{,}5 \text{ kgm}^{-3}}} \cong 75 \frac{m}{s}.$$

On peut mettre en doute la validité de ce résultat. Avec une vitesse si élevée, il est probable que l'écoulement soit turbulent. Or l'équation de Bernoulli suppose un écoulement stationnaire. La formule littérale (1) n'est valable que pour des vitesses (ou des surpressions) faibles.

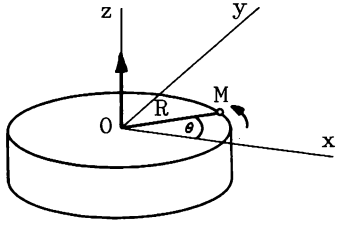
Chapitre 23

ROTATION DES SOLIDES

§ 132* Cinématique des rotations

Nous appelons ici solide un système matériel dont toutes les particules occupent des positions fixes les unes par rapport aux autres.

Considérons un solide tournant autour d'un axe. Nous étudions les mouvements relativement à un référentiel d'inertie, orthonormé, Oxyz. Nous faisons coïncider Oz avec l'axe de rotation. Soit un point M du solide, décrivant un cercle dans le plan Oxy. La position du corps à un instant quelconque t est définie par l'angle θ que fait la droite OM avec l'axe Ox. Pendant un petit intervalle de temps Δt, l'angle θ subit un accroissement $\Delta\theta$. Cet accroissement $\Delta\theta$ est aussi l'angle dont tourne le solide pendant l'intervalle Δt. Le quotient $\Delta\theta/\Delta t$ est la vitesse angulaire moyenne de l'objet. La limite de ce quotient quand Δt tend vers zéro est, par définition, la vitesse angulaire de l'objet à la date t. On la désigne par ω. On a:



$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Sauf indication contraire, nous définissons toujours l'angle θ de façon que son accroissement soit positif. Ainsi ω est positif.

La vitesse angulaire se mesure en radians par seconde, c'est-à-dire en s^{-1}, puisque 1 rad = 1.

Quand le solide effectue un tour complet, l'angle θ augmente

de 2π. C'est dire que l'angle dont le corps tourne par seconde vaut 2π fois le nombre de tours qu'il effectue par seconde. En désignant par ν la fréquence de rotation c'est-à-dire le nombre de tours effectué par unité de temps, on a donc:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

On peut définir un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Sa direction est celle de l'axe de rotation, son sens est celui de l'avance d'un tire-bouchon qui tournerait avec le solide, et sa grandeur est le ω défini ci-dessus.

Lorsque la vitesse angulaire est constante, le solide est dit en rotation uniforme.

Lorsqu'elle n'est pas constante, il est utile d'introduire une grandeur qui indique sa façon de varier. Pendant un petit intervalle de temps Δt, la vitesse angulaire subit un accroissement $\Delta\omega$, positif ou négatif. Le rapport $\Delta\omega/\Delta t$ est l'accélération angulaire moyenne. La limite de ce rapport quand Δt tend vers zéro est, par définition, l'accélération angulaire de l'objet à la date t. On la désigne par α. On a:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

L'accélération angulaire se mesure en s^{-2}. Elle est positive lorsque ω croît, c'est-à-dire lorsque le solide tourne de plus en plus vite. Elle est négative lorsque le mouvement de rotation se ralentit. L'accélération angulaire est grande, en valeur absolue, si la vitesse angulaire varie rapidement. Elle est nulle si la vitesse angulaire est constante.

Soit R la distance du point M à l'axe. Pendant l'intervalle de temps Δt, le point M décrit un petit arc de cercle dont la longueur est $R\Delta\theta$. La vitesse de M a pour grandeur:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = \omega R.$$

La vitesse d'un point situé à une distance R de l'axe de rotation a donc pour grandeur:

$$v = \omega R.$$

L'accélération normale et l'accélération tangentielle (§ 19) de ce point valent respectivement:

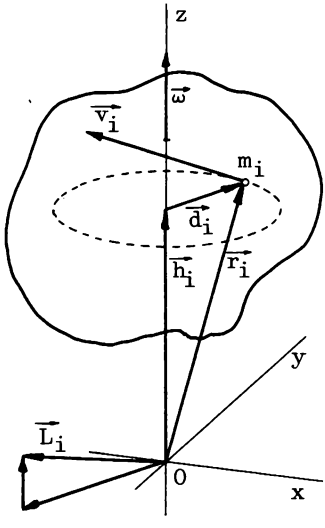
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.R = \alpha R.$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 R.} \qquad \boxed{a_t = \alpha R.}$$

§ 133* Moment d'inertie

Calculons le moment cinétique total d'un solide tournant autour d'un axe Oz avec une vitesse angulaire ω. Une particule du solide, de masse m_i, de position $\vec{r}_i$ et de vitesse $\vec{v}_i$ a un moment cinétique

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i.$$



Le vecteur position $\vec{r}_i$ est la somme d'un vecteur $\vec{h}_i$ parallèle à l'axe et d'un vecteur $\vec{d}_i$ perpendiculaire à l'axe. On peut écrire:

$$\vec{L}_i = (\vec{h}_i + \vec{d}_i) \wedge m_i \vec{v}_i$$
$$= \vec{h}_i \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{d}_i \wedge m_i \vec{v}_i. \qquad (1)$$

Le produit vectoriel étant toujours perpendiculaire à chacun des deux vecteurs qu'on multiplie, on voit que le premier terme de la somme obtenue est perpendiculaire à l'axe Oz, tandis que le second lui est parallèle et de même sens. La composante du moment cinétique de la particule suivant l'axe de rotation est donc égale à la norme du second terme. En remarquant que $\vec{d}_i$ et $\vec{v}_i$ sont perpendiculaires, on a donc:

$$L_{iz} = d_i . m_i v_i = d_i . m_i \omega d_i = \omega m_i d_i^2. \qquad (2)$$

Ce calcul est valable pour toutes les particules composant le solide. En additionnant membre à membre toutes les égalités (2), on obtient

$$\sum L_{iz} = \sum \omega m_i d_i^2$$

$$L_z = \omega \sum m_i d_i^2.$$

Le premier membre est la composante du moment cinétique total suivant l'axe Oz. Le second membre est le produit de la vitesse angulaire et d'une somme qui ne dépend que du solide et de l'axe choisi. Cette somme est appelée moment d'inertie du solide relativement à cet axe. On le désigne par I. Il se mesure en kg.m².

$$\boxed{I = \sum m_i d_i^2.}$$

Le moment d'inertie d'un objet relativement à un axe est la somme des produits des masses élémentaires qui le constituent par le carré de leurs distances respectives à cet axe. Un solide possède donc une infinité de moments d'inertie, puisqu'on peut envisager ses rotations autour d'une infinité d'axes. La composante du moment cinétique du solide suivant l'axe Oz s'exprime ainsi par la relation simple:

$$\boxed{L_z = I\omega.}$$

Le vecteur $\vec{L}$ a-t-il la direction de l'axe de rotation ? De façon générale, on doit répondre: non. L'étude ci-dessus montre que le vecteur $\vec{L_i}$ n'est pas parallèle à cet axe. La somme des $\vec{L_i}$ ne l'est pas non plus, sauf cas particulier. S'il arrive que le moment cinétique total soit parallèle à l'axe de rotation, on dit que celui-ci est un axe principal d'inertie. Dans ce cas seulement, la relation ci-dessus peut s'écrire vectoriellement:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

On peut montrer que tout corps solide possède au moins trois axes principaux d'inertie. Ceux-ci se coupent orthogonalement au barycentre. Examinons le cas particulier d'un solide possédant un axe de symétrie. A toute masse m_i correspond une masse égale m'_i, disposée symétriquement par rapport à l'axe. On a donc:

$$\vec{h'_i} = \vec{h_i} \qquad \vec{d'_i} = -\vec{d_i} \qquad \vec{v'_i} = -\vec{v_i}.$$

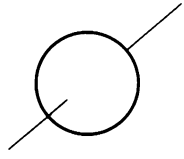
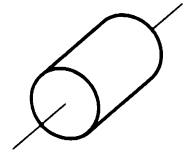
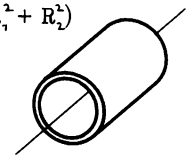
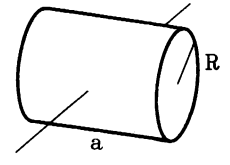
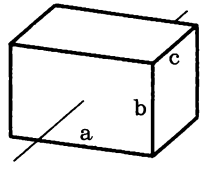
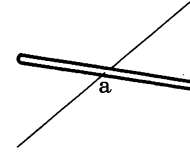
D'après l'égalité (1), la somme des moments cinétiques de ces deux masses symétriques vaut:

$$\vec{L_i} + \vec{L'_i} = \vec{h_i} \wedge m_i\vec{v_i} + \vec{h'_i} \wedge m'_i\vec{v'_i} + \vec{d_i} \wedge m_i\vec{v_i} + \vec{d'_i} \wedge m'_i\vec{v'_i}$$

$$\vec{L}_i + \vec{L}'_i = \vec{h}_i \wedge m_i(\vec{v}_i + \vec{v}'_i) + 2\vec{d}_i \wedge m_i\vec{v}_i = 2\vec{d}_i \wedge m_i\vec{v}_i .$$

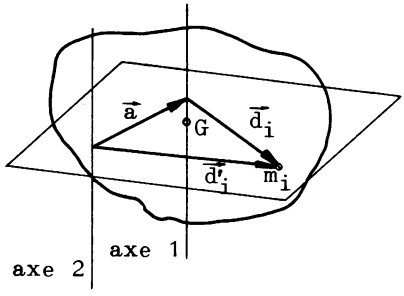
Les composantes perpendiculaires à l'axe s'annulent, tandis que celles qui sont parallèles à l'axe s'ajoutent. En groupant deux à deux tous les éléments symétriques, on conclut que le moment cinétique du solide est parallèle à l'axe de rotation. Un axe de symétrie d'un solide - et a fortiori un axe de révolution - est un axe principal d'inertie.

Le calcul effectif d'un moment d'inertie se fait le plus souvent par intégration. Voir l'exemple 1 du paragraphe 139. Le tableau ci-dessous fournit les moments d'inertie de quelques corps de forme simple.

Moments d'inertie	
Sphère: $\frac{2}{5}mR^2$ 	Cylindre: $\frac{1}{2}mR^2$ 
Anneau cylindrique: mR^2 ou $\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$ 	Cylindre: $\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ma^2$ 
Parallélipipède: $\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ 	Tige mince: $\frac{1}{12}ma^2$ 

La tige mince peut être considérée comme un cas particulier du parallélipipède (b et c sont très petits) ou du cylindre (R est très petit). Les moments d'inertie indiqués pour le cylindre sont valables pour le disque, si on pose $a \cong 0$. Celui du parallélipipède est valable pour une plaque rectangulaire ou carrée.

Lorsqu'on connaît le moment d'inertie d'un solide relativement à un axe qui passe par son centre de masse, on peut trouver son moment d'inertie relativement à n'importe quel axe parallèle au premier, grâce à la règle simple que nous allons établir. Le moment d'inertie relativement à l'axe 1 passant par le barycentre G est



$$I_G = \sum m_i d_i^2.$$

Soit $\vec{a}$ un vecteur joignant les axes, perpendiculairement. Le moment d'inertie relatif à l'axe 2 vaut:

$$I = \sum m_i d_i'^2 = \sum m_i (\vec{a} + \vec{d}_i)^2$$

$$= \sum m_i a^2 + \sum 2m_i \vec{a}\vec{d}_i + \sum m_i d_i^2$$

$$= a^2 \sum m_i + 2\vec{a} \sum m_i \vec{d}_i + \sum m_i d_i^2.$$

La somme qui figure au deuxième terme est nulle à cause de la définition du barycentre. On a donc:

$$\boxed{I = ma^2 + I_G.}$$

Ce résultat est connu sous le nom de <u>règle de Steiner.</u>

A titre d'exemple, calculons le moment d'inertie d'un cylindre relativement à une génératrice.

$$I = mR^2 + \tfrac{1}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Calculons celui d'un cube relativement à une de ses arêtes.

$$I = m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m(a^2 + a^2) = \frac{2}{3}ma^2.$$

§ 134* <u>Théorème du moment cinétique</u>

Nous avons établi au paragraphe 123 un théorème général, affirmant que dans tout système matériel la dérivée du moment cinétique total est égale à la somme des moments des forces

extérieures. Nous pouvons l'écrire

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

étant bien entendu que $\vec{M}$ désigne une somme de moments, ou moment résultant.

Le paragraphe précédent ayant fourni une expression du moment cinétique d'un solide, en fonction du moment d'inertie et de la vitesse angulaire,

$$L_z = I\omega \qquad \text{ou} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{(pour un axe principal d'inertie)}$$

nous allons étudier quelques conséquences ou applications importantes de ce théorème.

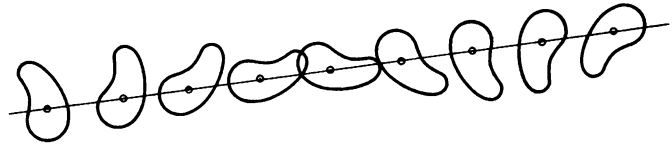
1. Considérons un solide ne subissant aucune force extérieure, et constituant ainsi un système isolé. Nous avons déjà remarqué que son barycentre est en mouvement rectiligne uniforme par rapport aux référentiels d'inertie, et est lui-même l'origine d'un référentiel d'inertie. En outre, le théorème du moment cinétique fournit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Si le solide tourne autour d'un axe principal d'inertie (ce qui est toujours possible puisque tout corps en possède au moins trois), on peut écrire:

$$I\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Le solide est alors en rotation uniforme autour de son centre de masse. Et son axe de rotation garde toujours la même direction.



Ce résultat pourrait être appelé la loi d'inertie des rotations.

Il faut toutefois remarquer que le solide peut aussi tourner autour d'un axe qui n'est pas principal d'inertie. Dans ce cas, $\vec{L}$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$. $\vec{L}$ est constant, mais $\vec{\omega}$ ne l'est pas. Le corps ne tourne pas toujours autour de la même

droite, de sorte que son mouvement est très compliqué.

2. Un autre cas intéressant à considérer est celui où le solide ne constitue pas un système isolé, mais où les forces extérieures ont une résultante passant par le centre de masse. C'est le cas, par exemple, pour un objet dans le champ de la pesanteur. Dans une telle situation, le barycentre se meut comme un point matériel qui aurait toute la masse du solide (§ 122). Ainsi que nous l'avons signalé, le théorème du moment cinétique est encore valable si on considère les moments par rapport au centre de masse. Prenons donc ce point pour origine. La résultante des forces extérieures passant par l'origine, son moment est nul, et on a:

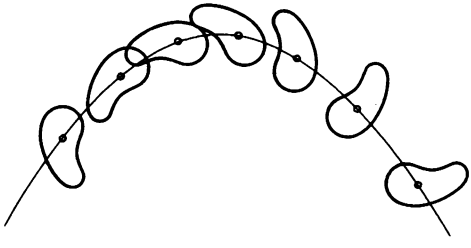
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Si le solide tourne autour d'un axe principal d'inertie, on a:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Le corps tourne donc à vitesse angulaire constante autour de son centre de masse.

Comme exemple d'une telle situation on peut mentionner un objet en chute libre. Le barycentre décrit une trajectoire parabolique. Un autre exemple est fourni par la terre. La résultante des forces de gravitation qu'elle subit, notamment de la part du soleil et de la lune ont une résultante qui passe très près de son centre de masse. Sa vitesse de rotation est sensiblement constante. Comme troisième exemple, on peut mentionner le système terre-lune, dont le barycentre tourne autour du soleil, et qui tourne à vitesse angulaire à peu près constante autour de son barycentre.



3. L'étude des cas précédents peut être étendue à des corps qui ne sont pas absolument rigides, mais qui sont capables de se déformer au cours du temps. Il en est ainsi pour le corps humain, et l'on peut dire que le théorème du moment cinétique joue un rôle fondamental dans la gymnastique et les sports.

Qu'il s'agisse d'un système isolé, ou d'un système dans lequel le moment résultant par rapport au barycentre est nul, on a:

$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Supposons que le corps tourne autour d'un axe principal d'inertie. La condition ci-dessus s'écrit:

$$I\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}}.$$

Les déformations du corps qui tourne peuvent entraîner des variations de son moment d'inertie. Si le moment d'inertie diminue, la vitesse angulaire augmente, et vice versa. C'est ainsi qu'une patineuse transforme un mouvement de rotation lent de son corps en un mouvement rapide, en amenant les masses de ses membres aussi près que possible de l'axe de rotation. Elle diminue ainsi son moment cinétique et augmente sa vitesse angulaire. De la même manière, un plongeur, suivant qu'il s'étend ou se pelotonne, fait varier son moment d'inertie, et peut régler sa vitesse de rotation de manière à arriver correctement dans l'eau, après un ou deux tours en l'air. Un sauteur à ski peut contrôler sa position en l'air en décrivant des cercles avec les bras. S'il tourne les bras dans un sens, son corps tourne dans l'autre. Un chat en chute tourne sa queue de manière à retomber sur ses pieds.

4. Après l'examen de trois cas où le moment des forces extérieures est nul, et le moment cinétique constant, considérons le cas, non moins important, où un solide est sollicité par des moments extérieurs. Le solide peut tourner autour d'un axe Oz. Par projection des vecteurs sur cet axe, le théorème du moment cinétique devient:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}. \qquad (1)$$

La composante du moment cinétique suivant l'axe de rotation peut s'exprimer en fonction de la vitesse angulaire et du moment d'inertie (§ 133).

$$L_z = I\omega.$$

Limitons-nous au cas où l'axe de rotation occupe une position fixe dans le solide. Le moment d'inertie est alors une constante, et on a:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.$$

L'équation (1) devient alors:

$$\boxed{M_z = I\alpha.} \qquad (2)$$

Cette forme particulière du théorème du moment cinétique est l'équation fondamentale de la dynamique des rotations. Elle présente une analogie avec l'équation de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

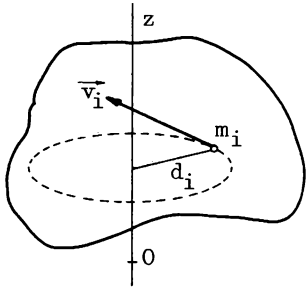
La résultante des forces est remplacée par le moment résultant (ou sa composante suivant l'axe), la masse est remplacée par le moment d'inertie, et l'accélération par l'accélération angulaire. On apprend ici que les moments de forces sont cause des variations de vitesse angulaire. En écrivant l'équation sous la forme

$$\alpha = \frac{M_z}{I}$$

on voit que l'effet d'un moment ne dépend pas seulement de sa grandeur, mais de l'objet auquel il s'applique. Si I est grand, l'accélération angulaire est petite. I est donc une mesure de l'inertie de l'objet, dans ses rotations. C'est pour cette raison qu'on l'appelle moment d'inertie. La relation (2) est le point de départ de la résolution de nombreux problèmes.

§ 135* Energie d'un corps en rotation

Calculons l'énergie cinétique totale d'un solide en rotation autour d'un axe Oz avec une vitesse angulaire ω. Une particule de masse m_i, située à une distance d_i de l'axe a une vitesse



$$v_i = \omega d_i$$

L'énergie cinétique totale du solide vaut donc:

$$E_c = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \tfrac{1}{2} m_i \omega^2 d_i^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum m_i d_i^2.$$

La somme qui apparaît ici n'est autre que le moment cinétique du solide relativement à l'axe Oz. L'énergie du solide en rotation est donc:

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2} I \omega^2.}$$

Cette formule présente une analogie avec celle qui définit l'énergie cinétique d'un point matériel:

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Le moment d'inertie correspond à la masse et la vitesse angulaire à la vitesse.

La formule ci-dessus fournit l'énergie cinétique pour un référentiel dans lequel l'axe de rotation est fixe. Il est commode de pouvoir exprimer l'énergie cinétique dans des conditions plus générales.

Au paragraphe 124, nous avons montré que l'énergie cinétique d'un système est égale à la somme de l'énergie cinétique de son barycentre, auquel on attribue toute la masse du système, et de l'énergie cinétique des constituants du système relativement au référentiel du barycentre. En appliquant cette règle à un solide en translation et en rotation autour de son centre de masse, on trouve, pour l'énergie totale:

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2.}$$

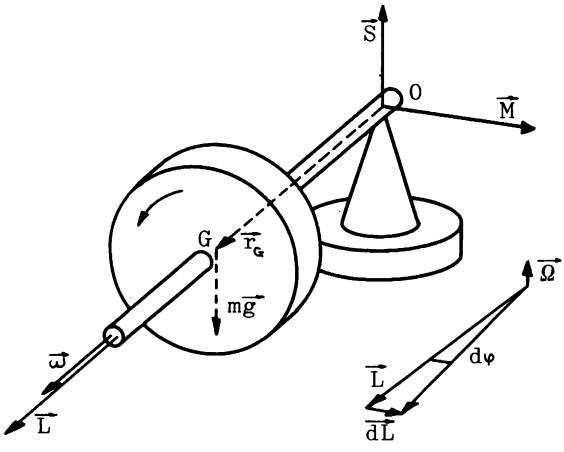
§ 136* Gyroscope

Un gyroscope est un instrument composé essentiellement d'une roue pouvant tourner très rapidement autour d'un axe. L'axe est installé dans un boîtier par un système articulé. La suspension est telle que le gyroscope peut avoir toutes les orientations possibles et que son barycentre reste toujours au même point relativement au boîtier, Le gyroscope est ainsi en équilibre dans n'importe quelle position. Le moment des forces extérieures qui s'exercent sur lui est toujours nul. On en déduit que son moment cinétique est constant. L'axe du gyroscope étant un axe principal d'inertie, on conclut que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est constant. Ainsi, l'axe a une direction fixe, quels que puissent être les mouvements du boîtier. Des gyroscopes sont utilisés en navigation aérienne et maritime pour conserver une direction fixe, servant de base aux déplacements de l'avion ou du navire.

Considérons un gyroscope suspendu par une extrémité O de son axe et capable de se mouvoir autour de ce point. Plaçons-le en position horizontale et abandonnons-le à lui-même. Quel sera son mouvement ? Le théorème du moment cinétique s'écrit:

$$\vec{M} = \frac{\overrightarrow{dL}}{dt}.$$

Les moments sont rapportés à O, qui appartient à un référentiel d'inertie. Le moment résultant est égal au moment du poids



$$\vec{M} = \vec{r}_G \wedge m\vec{g}.$$

Ce vecteur $\vec{M}$ est horizontal, et perpendiculaire à l'axe. $\vec{L}$ a évidemment la direction de l'axe. Pendant un petit intervalle de temps dt, le moment cinétique subit un accroissement

$$d\vec{L} = \vec{M}dt.$$

Cet accroissement est horizontal et perpendiculaire à l'axe. Cela signifie que le gyroscope ne tombe pas, comme on aurait pu s'y attendre, mais qu'il se déplace horizontalement. Ce mouvement est appelé précession. $d\vec{L}$ est perpendiculaire à $\vec{L}$. Ainsi, $\vec{L}$ varie en direction mais non en grandeur. Ce vecteur décrit un cercle dans un plan horizontal. Pendant l'intervalle de temps dt, $\vec{L}$ (et le gyroscope) tourne d'un angle

$$d\varphi = \frac{\|d\vec{L}\|}{L} = \frac{Mdt}{L}.$$

La vitesse angulaire de précession du gyroscope, qu'on désigne par Ω, vaut $d\varphi/dt$ ou

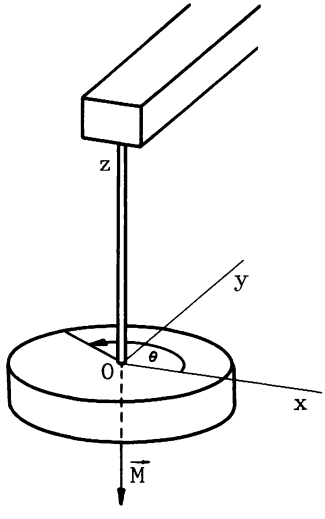
$$\Omega = \frac{M}{L}.$$

Pour prendre conscience du phénomène un peu insolite de la précession, il est recommandé de manipuler une roue de vélo tournant rapidement.

On peut remarquer que la précession implique une rotation autour d'un axe vertical, et par conséquent une composante verticale de $\vec{L}$ dont nous n'avons pas tenu compte. Le résultat ci-dessus n'est donc qu'approximatif. Il est d'autant plus correct que Ω est petit, c'est-à-dire que $\vec{L}$ est grand. Il n'est donc valable que si le gyroscope tourne très rapidement autour de son axe.

§ 137* Oscillateur harmonique

De même qu'il existe des oscillateurs harmoniques linéaires (§ 115), dans lesquels l'oscillation a lieu suivant une droite, il existe des oscillateurs "angulaires", dans lesquels le système pivote sur lui-même. Cette situation se réalise lorsqu'un solide possède une position d'équilibre et qu'il subit un moment de rappel dès qu'il en est écarté. Si ce moment est proportionnel à l'écart, qui est ici un angle θ, l'oscillateur est harmonique. Supposons que le solide tourne autour de l'axe Oz. Son écart est défini par l'angle θ formé par une de ses droites avec l'axe Ox. L'angle θ est compté positivement quand le solide a tourné dans le sens de Ox vers Oy. Le moment de rappel est alors parallèle à Oz et de sens contraire, puisqu'il tend à ramener le solide dans la position où $\theta = 0$. Sa composante suivant Oz vaut donc:



$$M_z = -C\theta,$$

où C est un facteur de proportionnalité appelé constante de rappel. Dans le cas particulier où l'oscillateur est un pendule de torsion (§ 52), la constante de rappel s'identifie à la constante de torsion du fil. Le théorème du moment cinétique peut s'écrire:

$$M_z = I\alpha \qquad \text{ou} \qquad M_z = I\ddot{\theta}$$

puisque l'accélération angulaire α est la seconde dérivée de l'angle θ. Des deux équations précédentes, on déduit:

$$I\ddot{\theta} = -C\theta.$$

C'est une équation différentielle pour la fonction $\theta = f(t)$. Elle a exactement la même forme mathématique que celle des mouvements harmoniques linéaires. Moyennant un choix convenable de l'origine du temps, sa solution peut se mettre sous la forme

$$\theta = A \sin\omega t \qquad \text{où} \qquad \omega = \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

L'angle θ caractérisant la position de l'oscillateur est donc une fonction sinusoïdale du temps. La période est:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

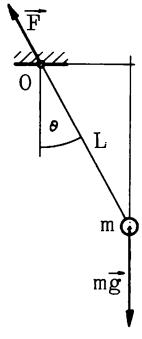
ou

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}.}$$

La période est d'autant plus grande que le moment d'inertie est grand, et que la constante de rappel est petite. Ceci se comprend intuitivement. L'amplitude A de l'oscillation peut prendre n'importe quelle valeur dans les limites du domaine de proportionnalité du moment de rappel.

Outre le pendule de torsion auquel il a été fait allusion ci-dessus, il y a de nombreux systèmes qui sont des oscillateurs angulaires. Nous nous arrêterons en détail sur deux d'entre eux.

1. Pendule simple. Ce dispositif, déjà étudié au paragraphe 117, peut être considéré comme un oscillateur angulaire, puisque le système tourne autour d'un axe horizontal perpendiculaire au plan dans lequel est le fil. Si le fil a une masse négligeable et que le corps suspendu est assimilable à un point matériel, le moment d'inertie du système relativement à l'axe de rotation Oz est



$$I = mL^2.$$

L est la longueur du fil et m la masse de l'objet suspendu. Il n'y a que deux forces extérieures qui s'exercent sur le système: $\vec{F}$, sur le fil au point d'attache et $m\vec{g}$ sur l'objet suspendu. Le moment de $\vec{F}$ est nul. La composante du moment de $m\vec{g}$ suivant l'axe Oz vaut

$$M_z = -mgL\sin\theta.$$

(Le signe - se justifie ainsi: le sens de l'axe Oz est défini en corrélation avec le sens positif des angles θ par la règle du tire-bouchon. Le sens du moment est défini par la même règle du tire-bouchon. On vérifie immédiatement que si θ est positif, le moment est orienté en sens inverse de l'axe, et vice versa. Dans la situation évoquée par le dessin ci-dessus, θ est positif, Oz est orienté vers l'avant et $\vec{M}$ vers l'arrière.)

Si l'oscillateur a une faible amplitude, l'angle θ reste petit et $\sin\theta$ peut être confondu avec θ. On a alors:

$$M_z = -mgL\theta.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le moment de rappel est proportionnel à l'écart et l'oscillateur est harmonique. La constante de rappel vaut:

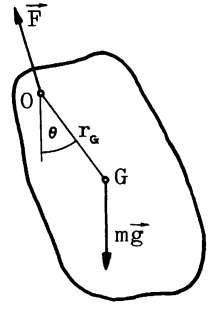
$$C = mgL.$$

La période d'oscillation est alors:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

On retrouve le résultat connu.

2. Pendule physique. On considère un solide quelconque, libre de se mouvoir autour d'un axe horizontal fixe Oz. La ou les forces $\vec{F}$ exercées par l'axe n'ont aucun moment de rappel. Le seul moment de rappel est celui du poids $m\vec{g}$, que l'on peut attacher au centre de gravité. Sa composante suivant Oz est



$$M_z = -mgr_G \sin\theta.$$

Pour les petits angles, elle est proportionnelle à θ,

$$M_z = -mgr_G\,\theta$$

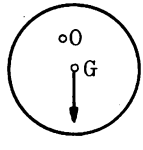
et l'oscillateur est harmonique. La constante de rappel vaut:

$$C = mgr_G.$$

La période de l'oscillation est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_G}}.$$

Par exemple, pour une sphère suspendue à un axe horizontal qui la traverse à une distance $\frac{1}{2}R$ du centre, on a:



$$r_G = \tfrac{1}{2}R \qquad \text{et} \qquad I = \frac{2}{5}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{13}{20}mR^2.$$

La période d'oscillation vaut:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{13mR^2.2}{20mgR}} = 2\pi\sqrt{1,3\,\frac{R}{g}}.$$

§ 138* Correspondances entre translations et rotations

Le tableau suivant met en évidence les analogies formelles entre les grandeurs physiques qui caractérisent les translations et celles qui caractérisent les rotations.

Translations:		Rotations:	
position	$\vec{r}$	angle	θ
vitesse	$\vec{v}$	vitesse angulaire	ω
accélération	$\vec{a}$	accélération angulaire	α
masse	m	moment d'inertie	I
quantité de mouvement	$\vec{p}$	moment cinétique	$\vec{L}$
force	$\vec{F}$	moment de force	$\vec{M}$
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$		$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$		$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	
$\vec{p} = m\vec{v}$		$L_z = I\omega$ ou $\vec{L} = I\vec{\omega}$	
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
$\vec{F} = m\vec{a}$		$M_z = I\alpha$	
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	(avec $F = kd$)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$	(avec $M = C\theta$)
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$		$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$	

A part le temps et l'énergie, aucune grandeur ne figure à la fois dans les deux groupes.

§ 139* Exemples de calcul

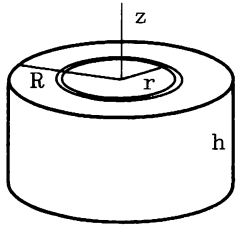
Exemple 1*: Calculer le moment d'inertie d'un cylindre de masse m et de rayon R, relativement à son axe de révolution.

△△△ On envisage un élément de volume ayant la forme d'un anneau cylindrique de rayon r, d'épaisseur dr, de hauteur h et de masse volumique ρ. Sa masse est

$$dm = \rho.2\pi r.dr.h.$$

On choisit un tel élément parce que toutes ses parties sont à

la même distance r de l'axe. Le moment d'inertie du cylindre est:



$$I = \int_0^R r^2\,dm = \int_0^R 2\pi h\rho r^3\,dr = \left[2\pi h\rho\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \tfrac{1}{2}\pi h\rho R^4.$$

Le produit $\pi R^2 h\rho$ représente la masse m de l'objet. Son moment d'inertie vaut alors:

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2.$$

Pour un cylindre dont toute la masse est localisée près de la surface (c'est le cas pour un tuyau), le moment d'inertie vaut, d'après la définition:

$$I = mR^2.$$

Cette valeur est supérieure à celle qui correspond au cylindre plein parce que les masses sont en moyenne plus éloignée de l'axe de rotation.

Exemple 2*: La cage d'une essoreuse a un moment d'inertie de 0,1 kgm². Un moteur exerce sur elle un couple dont le moment est constant et vaut 2 m.N. Elle est initialement immobile. Calculer sa fréquence de rotation et le nombre de tours effectués après 3 s de fonctionnement.

△△△ L'accélération angulaire de la cage vaut:

$$\alpha = \frac{M_z}{I}.$$

Elle est constante. La vitesse angulaire doit donc être une fonction affine du temps.

$$\omega = \alpha t + \omega_0.$$

Et l'angle parcouru doit être une fonction quadratique du temps.

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0.$$

ω_0 représente la vitesse angulaire en t = 0 et θ_0 l'angle parcouru à la même date. Si on choisit l'origine du temps lorsque le moteur a commencé de fonctionner, ces deux constantes sont nulles. Et on a:

$$\omega = \alpha t \qquad \theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Numériquement, on a: $\alpha = \dfrac{2\text{m.N}}{0{,}1\ \text{kgm}^2} = 20\ \text{s}^{-2}$.

A la date t = 3 s:

$$\omega = 20\ s^{-2}.3\ s = 60\ s^{-1} \qquad \theta = \tfrac{1}{2}.20\ s^{-2}.9\ s^{2} = 90.$$

La vitesse angulaire acquise est de 60 s^{-1}, ce qui correspond à une fréquence de rotation

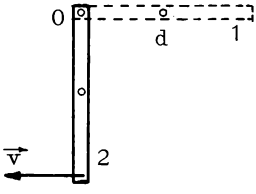
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 9{,}55\ s^{-1}.$$

L'angle dont la cage à tourné vaut 90 radians. Le nombre de tours correspondant est

$$\frac{90}{2\pi} = 14{,}3.$$

Exemple 3*: Une barre de masse m et de longueur d peut tourner autour d'un axe horizontal. Cet axe lui est perpendiculaire et se trouve près d'une de ses extrémités. On place la barre horizontalement et on la laisse tomber. Quelle est la vitesse maximale atteinte par son extrémité libre ?

△△△ Soit ω la vitesse angulaire de la barre lorsqu'elle passe au-dessous de l'axe. Utilisons la loi de conservation de l'énergie.



$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - mg\frac{d}{2}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe envisagé se calcule par la règle de Steiner:

$$I = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}md^2 = \frac{1}{3}md^2.$$

On en déduit: $\frac{1}{6}md^2\omega^2 - mg\frac{d}{2} = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{d}}.$$

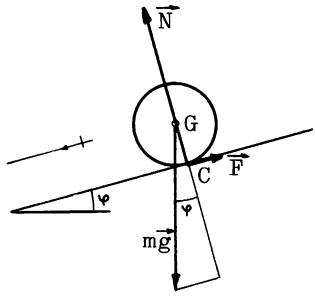
La vitesse maximale de l'extrémité libre de la barre est

$$v = \omega d = \sqrt{3gd}.$$

Exemple 4*: Calculer l'accélération du centre de masse d'une sphère, d'un cylindre et d'un tuyau de rayons communs R, rou-

lant sur un plan d'inclinaison φ.

$\triangle\triangle\triangle$ Traitons aussi longtemps que possible les trois problèmes ensemble. Le mobile subit trois forces: son poids $m\vec{g}$, une force de frottement $\vec{F}$ et une force normale $\vec{N}$ de la part du plan. Le théorème du centre de masse s'écrit:



$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}_G$$

En projetant les vecteurs sur un axe parallèle au plan, on obtient:

$$mg \sin\varphi - F = ma_G \qquad (1)$$

Comme F est inconnu, il faut une seconde équation. Appliquons le théorème du moment cinétique, sous sa forme $M_z = I\alpha$ en considérant les moments par rapport au centre de masse. La seule force dont le moment n'est pas nul est F. On a donc:

$$FR = I\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{FR}{I}.$$

Dans le référentiel du barycentre, l'accélération tangentielle du point de contact C vaut

$$R\alpha = \frac{FR^2}{I}.$$

Cette valeur fournit l'accélération du plan incliné, vue depuis le référentiel du barycentre, et réciproquement, l'accélération du barycentre, vue depuis un référentiel lié au plan incliné.

$$a_G = \frac{FR^2}{I} \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit:

$$mg \sin\varphi - a_G \frac{I}{R^2} = ma_G$$

d'où

$$a_G = \frac{mR^2 g \sin\varphi}{mR^2 + I} = \frac{g \sin\varphi}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

L'accélération d'un corps qui roule sur un plan incliné est toujours inférieure à celle d'un corps qui glisse sans frottement, et qui vaut $g \sin\varphi$ (§ 43).

Pour la sphère: $I = \frac{2}{5} mR^2$ $a_G = \frac{5}{7} g \sin\varphi$.

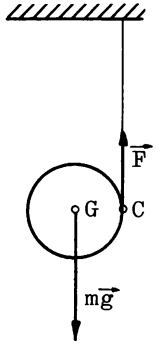
Pour le cylindre: $I = \frac{1}{2} mR^2$ $a_G = \frac{2}{3} g \sin\varphi$.

Pour le tuyau: $I = mR^2$ $a_G = \frac{1}{2} g \sin\varphi$.

Ce problème peut aussi être résolu par la méthode de l'exemple suivant.

Exemple 5*: Un fil est enroulé plusieurs fois autour d'une roue assimilable à un disque de rayon R et de masse m. L'axe de la roue est placé horizontalement. L'extrémité du fil étant liée à un point fixe, on laisse la roue tomber et le fil se dérouler. Calculer l'accélération de la roue.

△△△ La roue subit deux forces extérieures verticales: $m\vec{g}$ et la force $\vec{F}$ exercée par le fil. Son barycentre subit donc une accélération verticale. A un instant quelconque, le solide tourne autour d'un axe horizontal passant par le point de contact C du fil et de la roue. C'est l'axe instantané de rotation. Un instant plus tard, le solide tourne autour d'un autre axe, néanmoins on peut considérer que cet axe est toujours immobile dans un référentiel d'inertie. Appliquons le théorème du moment cinétique relativement à cet axe.



$$M_z = I\alpha. \qquad (1)$$

Le moment de $\vec{F}$ est nul. Celui de $m\vec{g}$ a pour composante:

$$M_z = mgR.$$

D'après la règle de Steiner, le moment d'inertie du solide vaut

$$I = mR^2 + \frac{1}{2} mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

La relation (1) devient:

$$mgR = \frac{3}{2} mR^2\alpha.$$

L'accélération angulaire du solide vaut donc:

$$\alpha = \frac{2g}{3R}.$$

L'accélération du barycentre est égale à l'accélération tangentielle de G dans la rotation autour de l'axe instantané de rotation.

$$a_G = R\alpha = \frac{2}{3}g.$$

Ce problème peut aussi être résolu par la méthode de l'exemple précédent.

EXERCICES

Il y a ici deux recueils complets d'exercices imbriqués l'un dans l'autre. L'un est constitué par les exercices à numéros impairs. Pour ceux-ci, les réponses sont en principe fournies à la fin de chaque donnée. L'autre recueil est constitué par les exercices à numéros pairs. Ceux-ci sont à peu près équivalents aux exercices qui les précèdent immédiatement. Cette disposition permettra aux étudiants ou aux professeurs de choisir dans l'une ou l'autre série, selon les préférences et les circonstances.

On a marqué d'un astérisque les exercices relatifs aux paragraphes munis du même signe, et les exercices difficiles.

Dans la plupart des réponses indiquées, on a pris comme valeur numérique de l'accélération de la pesanteur: $g = 10\ m/s^2$.

Exercices relatifs au chapitre 1: INTRODUCTION

1-1 Des mesures fournissent les valeurs:

$x = 140 \pm 3$ $\quad y = 25 \pm 1$ $\quad z = 504 \pm 2$ $\quad t = 177 \pm 3$

Calculer les incertitudes absolues et relatives sur les grandeurs suivantes:

$A = x^2$ $\quad B = \sqrt{y}$ $\quad C = 2\pi z$ $\quad D = x + y + z$

$E = z - 3x$ $\quad F = xyz$ $\quad G = (z - x)(t - 4y)$ $\quad H = \dfrac{z + 10y}{x + t}$

▲ Rép. $A = 19'600 \pm 800$; 4 %; $B = 5 \pm 0{,}1$; 2 %; $C = 3170 \pm 13$; 0,4 %; $D = 669 \pm 6$; 0,9 %; $E = 84 \pm 11$; 13 %; $F = (1{,}7 \pm 0{,}1).10^6$; 6 %; $G = 28'000 \pm 3000$; 10 %
$H = 2{,}38 \pm 0{,}08$; 3,5 %.

1-2 On mesure les valeurs suivantes:

$a = 4{,}8 \pm 0{,}1$ $\quad b = 25 \pm 0{,}1$ $\quad c = 90 \pm 1$

Calculer les incertitudes absolues et relatives sur les grandeurs:

$s = a^3$ $\quad t = \sqrt{b}$ $\quad u = \dfrac{\pi}{c}$ $\quad v = a + b + c$

$w = c - 2b - 5a$ $\quad x = a^2 b$ $\quad y = (10a - b)(b + c)$ $\quad z = \dfrac{bc}{a + b}$

1-3* On mesure l'hypoténuse a et un angle aigu α d'un triangle rectangle. On trouve: a = 17,41 cm ± 0,03 cm et α = 36,2° ± 0,2°. Calculer les côtés adjacents à l'angle droit avec leurs incertitudes absolues. ▲ Rép. 10,28 cm ± 0,07 cm; 14,05 cm ± 0,06 cm.

1-4* Les cathètes d'un triangle rectangle mesurent 6,45 cm et 14,10 cm, ces mesures étant entachées d'une incertitude de 0,05 cm. Calculer les angles aigus de ce triangle, avec leurs incertitudes absolues.

Exercices relatifs au chapitre 2: HORAIRES

2-1 Dans un référentiel orthonormé à deux dimensions, un mobile a l'horaire

$\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2\ ms^{-2} \\ -1\ ms^{-2} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -1\ ms^{-1} \\ 3\ ms^{-1} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -12\ m \\ 6\ m \end{pmatrix}$.

Calculer la position du mobile de seconde en seconde pour $-3\ s \leq t \leq 3\ s$ et représenter graphiquement la trajectoire.

▲ Rép.

t (s)	-3	-2	-1	0	1	2	3
x (m)	9	-2	-9	-12	-11	-6	3
y (m)	-12	-4	2	6	8	8	6

2-2 Dans un référentiel orthonormé, un mobile a l'horaire

$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1\ ms^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\ ms^{-2} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -5\ ms^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Représenter graphiquement la trajectoire du mobile dans l'intervalle allant de -3 s à 3 s.

2-3* Deux mobiles ont les horaires respectifs

$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}t$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} -20\ m \\ 2\ m \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5\ ms^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{r} = \vec{C} + \vec{D}t$ où $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\ m \end{pmatrix}$, $\vec{D} = \begin{pmatrix} 2\ ms^{-1} \\ -2\ ms^{-1} \end{pmatrix}$.

a) Où leurs trajectoires se croisent-elles ?
b) Quand leur distance est-elle minimale ? Et que vaut cette distance minimale ? ▲ Rép. (-4 m; 2 m); 4 s; 14,4 m.

2-4* Deux mobiles ont les horaires respectifs

$\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2\ ms^{-2} \\ -3\ ms^{-2} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2\ ms^{-1} \\ 4\ ms^{-1} \end{pmatrix}$,

$\vec{r} = \vec{C}t + \vec{D}$ où $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3\ ms^{-1} \\ -4\ ms^{-1} \end{pmatrix}$, $\vec{D} = \begin{pmatrix} -2\ m \\ 4\ m \end{pmatrix}$.

a) Quelle est la distance des mobiles à la date t = -2 s ?
b) Ces mobiles entrent-ils en collision ? Si oui, où et quand ?

Exercices relatifs au chapitre 3: VITESSE

3-1 Un mobile a l'horaire suivant: $\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t^3$ où

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \text{ m/s}^2 \\ 1 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m/s}^3 \\ 0 \\ -2 \text{ m/s}^3 \end{pmatrix}$$

Calculer sa vitesse à l'heure t = 1 s de deux manières:
a) En utilisant comme points auxiliaires les points où se trouve le mobile aux heures 1,0 s et 1,1 s.
b) En dérivant. ▲ Rép. (1,2 m/s; 2,1 m/s; -6,6 m/s); (1 m/s; 2 m/s; -6 m/s).

3-2 Un mobile a l'horaire: $\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}t + \vec{C}t^2$

où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \text{ m} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -8 \text{ m/s} \\ -24 \text{ m/s} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s}^2 \\ 1 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$.

Déterminer sa vitesse en t = 4 s en faisant deux approximations successives, puis en dérivant. Comparer les résultats.

3-3 Dans un référentiel orthonormé Ox, Oy, un mobile a l'horaire

$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \text{ ms}^{-3} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \text{ ms}^{-2} \\ -2 \text{ ms}^{-2} \end{pmatrix}$.

a) Calculer la position et la vitesse du mobile, de seconde en seconde, de la date -2 s à la date 3 s, et faire une représentation graphique.
b) Où et quand la vitesse est-elle parallèle à l'axe Ox ?

▲ Rép.

t (s)	-2	-1	0	1	2	3
x (m)	16	4	0	4	16	36
y (m)	-16	-3	0	-1	0	9
v_x (m/s)	-16	-8	0	8	16	24
v_y (m/s)	20	7	0	-1	4	15

t = 1,33 s; (7,1 m; -1,2 m)

3-4 Dans un référentiel orthonormé Ox, Oy, un mobile a l'horaire

$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \text{ ms}^{-3} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \text{ ms}^{-2} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \text{ ms}^{-1} \\ -6 \text{ ms}^{-1} \end{pmatrix}$.

a) Représenter la trajectoire et la vitesse, de seconde en seconde, de la date -2 s à la date 3 s.
b) Où et quand la trajectoire est-elle parallèle à l'axe Ox ?

3-5 Un mobile se déplaçant dans un plan à l'horaire suivant:

t (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
x (m)	0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,3	1,6	1,8
y (m)	0	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3	1,4	1,4

Représenter graphiquement la trajectoire. Déterminer et représenter les vitesses aux points où cela est possible.

▲ Rép.

v_x (m/s)	0,1	0,3	0,5	0,6	0,6	0,5
v_y (m/s)	0,5	0,6	0,6	0,5	0,3	0,1

3-6 Un objet ponctuel a l'horaire suivant, exprimé dans un référentiel orthonormé.

t (s)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (m)	0	2	6	12	20	30	42	56
y (m)	0	12	20	24	24	20	12	0

Représenter la trajectoire, et les vitesses aux points où la détermination est possible.

3-7 Un touriste monte sur une montagne et redescend par le même chemin. A l'aller, sa vitesse est de 3 km/h. Au retour, elle est de 7 km/h. Calculer sa vitesse moyenne.
▲ Rép. 4,2 km/h.

3-8 Un train parcourt 10 km à la vitesse de 80 km/h et les 10 km qui suivent à la vitesse de 100 km/h. A quelle vitesse aurait-il dû circuler pour franchir ces 20 km dans le même temps, avec un mouvement uniforme ?

3-9 Dans une machine, un axe tourne à raison de 1200 tours par minute. Il a un diamètre de 3 cm. Quelle est la vitesse d'un point de la périphérie de cet axe ? ▲ Rép. 1,88 m/s.

3-10* Dans un cylindre de moteur à explosion, le piston a une course de 84,4 mm. Calculer la vitesse maximale du piston lorsque le moteur tourne à 5000 tours/min. On remarquera que le diamètre du cercle décrit par le point d'attache de la bielle au vilbrequin est égal à la course du piston.

3-11* Un test révèle qu'une voiture atteint 60 km/h en 6,1 s, 80 km/h en 11,2 s, 100 km/h en 17,6 s et 120 km/h en 30,4 s. Calculer approximativement la distance qu'elle doit franchir pour atteindre 120 km/h. ▲ Rép. 700 m.

3-12* Une voiture de sport peut atteindre 40 km/h en 2,4 s, 60 km/h en 4,0 s, 80 km/h en 5,7 s, 100 km/h en 8,5 s, 120 km/h en 11,3 s, et 140 km/h en 15,5 s. Calculer approximativement la distance minimale qu'elle doit franchir pour atteindre la vitesse de 140 km/h.

3-13* Un mobile passe au point (6 m; -2 m) à la vitesse (-2 m/s; 2 m/s). Son mouvement est rectiligne uniforme. Au même instant, un second mobile est lancé du point (10 m; 10 m). Quelle vitesse constante doit-il avoir pour rencontrer le premier mobile 4 s plus tard ? ▲ Rép. (-3 m/s; -1 m/s).

3-14* Un mobile passe au point (100 m; -120 m) à la date 10 s et au point (40 m; 60 m) à la date 20 s. Etablir son horaire analytique sachant que sa vitesse est constante.

Exercices relatifs au chapitre 4: ACCELERATION

4-1 Dans un référentiel orthonormé, un mobile a l'horaire $\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\ ms^{-3} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2\ ms^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8\ ms^{-1} \end{pmatrix}$
Calculer la position, la vitesse et l'accélération du mobile dans l'intervalle allant de t = -3 s à t = 3 s. Représenter graphiquement la trajectoire en s'aidant des vecteurs vitesse, qui lui sont tangents. Représenter également l'accélération.

▲ Rép.

t (s)	-3	-2	-1	0	1	2	3
x (m)	18	8	2	0	2	8	18
y (m)	-3	8	7	0	-7	-8	3
v_x (ms^{-1})	-12	-8	-4	0	4	8	12
v_y (ms^{-1})	19	4	-5	-8	-5	4	19
a_x (ms^{-2})	4	4	4	4	4	4	4
a_y (ms^{-2})	-18	-12	-6	0	6	12	18

4-2 Dans un référentiel orthonormé, un mobile a l'horaire $\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t$ où $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1\ ms^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\ ms^{-2} \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -5\ ms^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$
Calculer la position, la vitesse et l'accélération du mobile, de seconde en seconde, dans l'intervalle allant de t = -3 s à t = 3 s. Représenter graphiquement la trajectoire en s'aidant des vecteurs vitesse, qui lui sont tangents. Représenter également l'accélération.

4-3 Un mobile se déplace dans un plan. Sa position au cours du temps est donnée par le tableau suivant.

t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
x (m)	22	21	19	16	12	8	5	4	4
y (m)	0	2	4	6	7	7	6	4	2

Déterminer la vitesse et l'accélération aux points où cela est possible. Faire une représentation graphique.

▲ Rép.

v_x (ms^{-1})	-15	-25	-35	-40	-35	-20	-5
v_y (ms^{-1})	20	20	15	5	-5	-15	-20
a_x (ms^{-2})		-100	-75	0	100	150	
a_y (ms^{-2})		-25	-75	-100	-100	-75	

4-4 Déterminer la vitesse et l'accélération d'un mobile ayant l'horaire suivant:

Date (s) :	0	1	2	3	4	5
Position (m;m):	(20;20)	(24;20)	(28;16)	(28;8)	(24;0)	(16;-4)
Date :	6	7	8	9		
Position :	(8;-4)	(0;0)	(-8;8)	(-12;20)		

4-5 Document expérimental. On photographie en lumière stroboscopique, à une fréquence de 10 par seconde, un objet qui glisse sur un rail à coussin d'air incliné à 2,77°. L'objet remonte la pente. On enregistre les abscisses suivantes, relative-

ment à un axe parallèle au rail: 75,6 cm; 68,7; 62,3; 56,4; 50,9; 45,9; 41,4; 37,4; 33,8; 30,7. Calculer les accélérations le long du trajet, et leur moyenne. Comparer le résultat avec celui de l'exemple 3 du paragraphe 20 (page 46).
▲ Rép. 0,5 m/s^2; 0,5; 0,4; 0,5; 0,5; 0,5; 0,4; 0,5; moyenne: 0,47 m/s^2. L'accélération est pratiquement la même à la descente et à la montée.

4-6 Document expérimental. Sur un rail à coussin d'air horizontal, un glisseur est tiré horizontalement par un fil. Ce fil passe sur une poulie et aboutit à un contrepoids suspendu en l'air. On photographie le glisseur en lumière stroboscopique, à intervalles de 0,1 s. Relativement à un axe parallèle à la voie, on enregistre les abscisses suivantes (en cm): 19,7; 20,6; 22,1; 24,3; 27,1; 30,5; 34,5; 39,2; 44,5; 50,5; 57,1; 64,4; 72,3; 80,9. Vérifier que l'accélération est constante, aux erreurs d'expérience près (selon § 45, Ex. 6). Calculer la moyenne des accélérations obtenues.

4-7 Document expérimental. Une bille qui tombe verticalement en chute libre est illuminée 50 fois par seconde par un stroboscope. On enregistre photographiquement ses positions successives. Relativement à un axe vertical orienté vers le bas, on obtient les coordonnées suivantes (en cm): 3,3; 4,2; 5,4; 7,0; 8,9; 11,3; 14,1; 17,2; 20,8; 24,8; 29,2; 34,0; 39,3; 44,9; 51,0. Vérifier que l'accélération est pratiquement constante (selon le § 27). Calculer la moyenne des accélérations trouvées. ▲ Rép. (en ms^{-2}): 7,5; 10,0; 7,5; 12,5; 10,0; 7,5; 12,5; 10,0; 10,0; 10,0; 12,5; 7,5; 12,5; moyenne: 10,0.

4-8* Document expérimental. Une bille lancée obliquement en l'air est éclairée par un stroboscope à une fréquence de 50 s^{-1}. On enregistre photographiquement les positions suivantes: (Ox est horizontal, Oy est vertical et orienté vers le bas) (0,003 m;0,084 m), (0,027;0,067), (0,052;0,056), (0,077;0,048), (0,102;0,044), (0,128;0,043), (0,153;0,046), (0,178;0,054), (0,203;0,066), (0,228;0,081), (0,254;0,100), (0,279;0,123), (0,304;0,150), (0,330;0,181), (0,355;0,216), (0,379;0,255). Vérifier que l'accélération est à peu près toujours la même (selon § 27). Calculer la moyenne des accélérations obtenues.

4-9 Un motocycliste roule à 60 km/h. Son véhicule est capable d'une accélération de 4 m/s^2.
a) Combien lui faut-il de temps pour atteindre 70 km/h ?
b) Quelle distance lui faut-il pour atteindre cette vitesse ?
▲ Rép. 0,69 s; 12,5 m.

4-10 Une voiture roulant à 50 km/h freine soudain. Son accélération dans le freinage est de 5 m/s^2. Calculer sa vitesse
a) après 0,5 s,
b) après un parcours de 5 m.

4-11 Un cycliste roulant à 30 km/h cesse soudain de pédaler. Quelle vitesse aura-t-il 20 m plus loin si son accélération due au frottement est de 0,3 m/s^2 ? ▲ Rép. 27,4 km/h.

4-12 Une voiture roulant sur une route droite a, en un certain point, une vitesse de 80 km/h. En un point situé 50 m plus loin, sa vitesse est de 85 km/h. Calculer son accélération moyenne dans cet intervalle.

4-13 Un test révèle qu'une voiture atteint 60 km/h en 6,1 s, 80 km/h en 11,2 s, 100 km/h en 17,6 s et 120 km/h en 30,4 s. Calculer ses accélérations moyennes aux différentes vitesses. ▲ Rép. 2,73 ms^{-2}; 1,09 ms^{-2}; 0,87 ms^{-2}; 0,43 ms^{-2}.

4-14 Une voiture de sport peut atteindre 40 km/h en 2,4 s, 60 km/h en 4,0 s, 80 km/h en 5,7 s, 100 km/h en 8,5 s, 120 km/h en 11,3 s et 140 km/h en 15,5 s. Calculer ses accélérations aux différentes vitesses.

4-15* Une bille est reliée à un point fixe par un fil de 80 cm de long. Elle oscille dans un plan vertical. En un certain point de sa trajectoire, elle a une vitesse de 3,54 m/s. Deux centièmes de seconde plus tard, sa vitesse s'est abaissée à 3,46 m/s. Calculer l'accélération normale, l'accélération tangentielle, la norme du vecteur accélération et l'angle qu'il forme avec la vitesse. ▲ Rép. 15,3 ms^{-2}; -4 ms^{-2}; 15,8 ms^{-2}; 104,6°.

4-16* Un mobile a l'horaire $\vec{r} = \vec{i}.At + \vec{j}.Bt^2$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, et A et B deux constantes. Calculer, en fonction du temps, l'accélération tangentielle, l'accélération normale, le rayon de courbure de la trajectoire, et l'angle formé par la vitesse et l'accélération. Application numérique: A = 8 m/s, B = 1 m/s^2, t = 3 s.

Exercices relatifs au chapitre 5: MOUVEMENTS PARTICULIERS

5-1 Un train ayant un mouvement uniforme met 10 s pour parcourir un trajet assimilable à un arc de cercle de 30° et de 480 m de rayon. Calculer sa vitesse en km/h et son accélération. ▲ Rép. 90,5 km/h; 1,32 m/s^2.

5-2 Une essoreuse à linge tourne à raison de 50 tours par seconde. Sa cage a un rayon de 20 cm. Calculer l'accélération d'un objet situé près de la paroi.

5-3 Un mobile passe au point (1 m; 11 m) d'un plan muni d'un système d'axes orthonormés, à une vitesse valant (10 m/s; -6 m/s). Sachant que son accélération est constante et vaut

($-2\ m/s^2$; $2\ m/s^2$), déterminer sa position et sa vitesse dans un intervalle de 7 s à partir de l'instant considéré. Faire une représentation graphique. ▲ Rép. de s en s:
$\vec{r}$ (m) (10;6), (17;3), (22;2), (25;3), (26;6), (25;11)
$\vec{v}$ (m/s) (8;-4), (6;-2), (4;0), (2;2), (0;4), (-2;6)

5-4 A l'heure t = 0, un mobile se trouve en un point qui, repéré dans un référentiel orthonormé, a les coordonnées (6 m; 3 m). A ce moment, sa vitesse vaut (12 m/s; 0). Son accélération est constante et vaut ($-16\ m/s^2$; 0). Déterminer sa position et sa vitesse tous les quarts de seconde, jusqu'à l'heure t = 2 s. Faire une représentation graphique.

5-5 Une bille qui roule sur un plan incliné a un mouvement uniformément accéléré. Dans un cas particulier, on observe qu'une bille lâchée sans vitesse initiale sur un plan incliné franchit 0,9 m en 3 s. Calculer son accélération et la distance qu'elle franchit pendant la seconde qui suit.
▲ Rép. $0,2\ ms^{-2}$; 0,7 m.

5-6 Un wagonnet descendant sur un plan incliné, le long d'une ligne de plus grande pente, passe en un point P à une vitesse de 0,7 m/s. Son accélération, qui est constante, vaut $0,4\ m/s^2$.
a) Combien met-il de temps pour arriver en un point Q situé 6 m plus loin, et à quelle vitesse y arrive-t-il ?
b) S'il a été lâché sur le plan avec une vitesse initiale nulle, où et quand était-ce ?

5-7 Une boule est lancée à une vitesse de 4 m/s, horizontalement sur le sol. Elle s'arrête après un parcours de 8 m. On suppose son mouvement uniformément accéléré.
a) Quelle est son accélération ?
b) Quelle est sa vitesse lorsqu'elle est à 2 m de son point d'arrêt ? ▲ Rép. $1\ m/s^2$; 2 m/s.

5-8 Une boule est lancée sur un terrain rugueux qui la freine. Sa vitesse initiale est de 5 m/s. Durant les 4 premières secondes, elle parcourt 16 m. En admettant que le mouvement soit uniformément accéléré, calculer la distance qu'elle franchit jusqu'à son arrêt.

5-9* Calculer l'accélération d'un point de la terre, de latitude φ. La terre sera assimilée à une boule de rayon R, ayant une période de révolution T.
Application numérique: R = 6370 km, T = 23 h 56 min 4 s (= 1 jour sidéral), $\varphi = 47^\circ$. ▲ Rép. $4\pi^2 R \cos\varphi / T^2$; $0,023\ ms^{-2}$.

5-10* Un petit objet est attaché à un point fixe par une ficelle de longueur L. Il décrit un cercle dans un plan horizontal, la ficelle faisant un angle α avec la verticale. Une

révolution nécessitant un temps T, calculer l'accélération de l'objet.
Application numérique: L = 1,2 m, $\alpha = 25^{\circ}$, T = 2,09 s.

5-11* A l'heure t = 0, un mobile a la vitesse $\vec{v}_o$ et le vecteur position $\vec{r}_o$. L'horaire de son accélération est $\vec{a} = \vec{k}t + \vec{h}$, où $\vec{k}$ et $\vec{h}$ sont deux constantes. Etablir l'horaire du mobile. ▲ Rép. $\vec{r} = \frac{1}{6}\vec{k}t^3 + \frac{1}{2}\vec{h}t^2 + \vec{v}_o t + \vec{r}_o$.

5-12* L'accélération d'un mobile a l'horaire: $\vec{a} = \vec{k}t^2$. Etablir l'horaire de la vitesse, puis l'horaire du mobile. $\vec{k}$ est un vecteur constant.

5-13* Un mobile a l'horaire $\vec{r} = \vec{i}.R\ \cos kt^2 + \vec{j}.R\ \sin kt^2$, où R et k sont deux constantes et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires orthogonaux.
a) Le mouvement est-il circulaire ?
b) Le mouvement est-il uniforme ?
c) Calculer l'accélération tangentielle et l'accélération normale en fonction du temps. ▲ Rép. oui; non; 2Rk; $4Rk^2t^2$.

5-14* Un mobile a l'horaire $\vec{r} = \vec{i}.A\ \cos\omega t + \vec{j}.B\ \sin\omega t$, où $\omega = 0{,}2\pi\ s^{-1}$, A = 2 m, B = 1 m. Les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Esquisser la trajectoire. Calculer et représenter quelques vecteurs vitesse et accélération.

5-15* Deux voitures roulent en sens inverse sur une route où le croisement est impossible. Leurs vitesses sont respectivement 36 et 54 km/h. Les conducteurs s'aperçoivent lorsque leur distance est de 30 m. Ils freinent. Leurs accélérations sont supposées constantes et ont la grandeur de 5 m/s^2. Y a-t-il collision ? Si oui, où et quand ? Et quelle est la vitesse des voitures au moment du choc ? ▲ Rép. Oui; 10 m; 20 m; 2 s; 0; 5 m/s.

5-16* Deux voitures roulent à 20 m l'une derrière l'autre, à 50 km/h. A un instant donné, elles accélèrent au maximum. La première a une accélération de 1 m/s^2, la seconde, une accélération de 1,5 m/s^2.
a) Combien faut-il de temps pour que la seconde rattrape la première ?
b) Quelle distance chacune d'elle a-t-elle franchi dans la période d'accélération ?
c) Que valent leurs vitesses au moment du dépassement ?

5-17* Une hélice de pas p est enroulée sur un cylindre de rayon R.
a) Calculer son rayon de courbure. (Utiliser l'horaire d'un mouvement hélicoïdal uniforme.)
b) Que doit valoir le pas pour que le rayon de courbure de

l'hélice soit le double du rayon du cylindre.
▲ Rép. $R + p^2/4\pi^2R$; $2\pi R$.

5-18* Trouver un horaire analytique compatible avec l'horaire par points discrets de l'exercice 3-6.

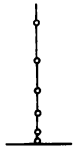
Exercices relatifs au chapitre 6: CHUTE LIBRE

6-1 On lâche une pierre depuis le haut d'un barrage. Elle met 4 s pour arriver en bas. Quelle est la hauteur du barrage ? Et à quelle vitesse la pierre arrive-t-elle en bas ?
▲ Rép. 80 m; 40 m/s.

6-2 Depuis quelle hauteur faut-il laisser tomber un objet pour qu'il arrive au sol avec une vitesse de 100 km/h ?

6-3 Un objet tombe en chute libre. Sa vitesse initiale est nulle. Calculer les distances qu'il franchit pendant chacune des cinq premières secondes. ▲ Rép. 5 m; 15 m; 25 m; 35 m; 45 m.

6-4 Des boules sont attachées à un fil. Le fil est tenu verticalement de manière que la dernière boule touche le sol. Lorsqu'on lâche le fil, les boules arrivent successivement sur le sol en faisant un bruit. Comment doivent-elles être disposées le long du fil pour que ces bruits soient régulièrement espacés dans le temps, par exemple tous les deux dizièmes de seconde ?



6-5 Un corps tombant verticalement passe à la vitesse de 40 m/sec devant les yeux d'un observateur.
a) Où est-il et quelle vitesse a-t-il une seconde après ?
b) Où est-il et quelle vitesse a-t-il une seconde avant ?
c) Quand se trouve-t-il à son point culminant ? Où est ce point ?
d) Quand se trouve-t-il 60 m au-dessus de l'observateur ?
▲ Rép. 45 m; 50 m/s; 35 m; 30 m/s; 4 s; 80 m; 2 s; 6 s.

6-6 Un corps est lancé verticalement en l'air, depuis le sol, avec une vitesse de 20 m/s.
a) Quelle est la hauteur maximale qu'il atteint ?
b) Combien de temps met-il pour atteindre cette hauteur ?
c) Après combien de temps est-il de retour au sol ?
d) Avec quelle vitesse y arrive-t-il ?
e) Quelle vitesse a-t-il 3 s après son départ ?
f) Combien de temps met-il pour franchir chaque moitié de la montée et chaque moitié de la descente ?
g) Quelle est sa vitesse lorsqu'il est 15 m au-dessus du sol ?

6-7 On fait rouler un wagonnet sur une table de 1 m de haut, perpendiculairement à son bord.
a) A quelle vitesse faut-il le faire rouler pour qu'il s'écrase au sol à 1,5 m de la table, cette distance étant comptée horizontalement ?
b) Quelle est la grandeur de la vitesse du wagonnet à son arrivée au sol ? ▲ Rép. 3,35 m/s; 5,59 m/s.

6-8* Dans un tram roulant à 18 km/h sur une route horizontale, un objet tombe du plafond.
a) Quelle est la grandeur de sa vitesse après 0,2 s de chute, pour un observateur dans le tram, et pour un observateur dans la rue ?
b) Représenter graphiquement la trajectoire de l'objet durant les sept premiers dixièmes de seconde, pour chacun de ces observateurs.

6-9* On laisse tomber un objet d'un balcon situé 20 m au-dessus du sol. Au même instant, on lance un objet depuis le sol, verticalement, à la vitesse de 16 m/s.
a) Où les deux objets se croisent-ils ?
b) Combien de temps s'écoule-t-il entre leurs arrivées au sol ?
c) A quelle vitesse faudrait-il lancer l'objet depuis le sol pour que le croisement se situe à mi-hauteur entre le sol et le balcon ? ▲ Rép. à 12,2 m du sol; 1,2 s; 14,1 m/s.

6-10* Deux objets partent ensemble du même endroit et tombent librement. Le premier est lâché sans vitesse initiale. Le second est lancé horizontalement à une vitesse $\vec{u}$. Déterminer en fonction du temps le vecteur qui joint le premier objet au second. Quelle conclusion intéressante peut-on tirer du résultat obtenu ?

6-11* Un projectile est lancé du sol à une vitesse de 50 m/s faisant un angle $\alpha = 53{,}13^\circ$ avec l'horizontale ($\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\alpha = 0{,}6$).
a) Calculer la portée du jet, la hauteur atteinte par le projectile et la durée du trajet. On suppose le sol horizontal.
b) Déterminer la position du mobile toutes les secondes à partir du départ et représenter graphiquement la trajectoire.
c) Sous quel angle autre que $53{,}13^\circ$ doit-on effectuer le lancement si l'on veut obtenir la même portée ?
d) Déterminer la hauteur maximale et la portée maximale qu'il est possible d'atteindre avec une vitesse initiale de 50 m/s. Indiquer les angles correspondants. ▲ Rép. 240 m; 80 m; 8 s; (30 m;35 m); (60 m;60 m); (90 m;75 m); (120 m;80 m); (150 m; 75 m); (180 m;60 m); (210 m;35 m); (240 m;0); $36{,}9^\circ$; 125 m; 90°; 250 m; 45°.

6-12* Un jet d'eau a les caractéristiques suivantes. L'orifice se trouve 1 m au-dessus du bassin, l'axe du tuyau fait un angle de 40° avec l'horizontale et l'eau sort à une vitesse de 12 m/s. Déterminer
a) la hauteur atteinte par le jet d'eau,
b) la position du point où l'eau arrive dans le bassin,
c) l'inclinaison du jet d'eau à cet endroit.

6-13* On a un objet en chute libre. Quel est le mouvement de son ombre
a) sur un mur vertical, si le soleil est à l'horizon ?
b) sur le sol, si le soleil est au zénith ?

m
$\vec{p}$

Exercices relatifs au chapitre 7: MASSE ET QUANTITE DE MOUVEMENT

7-1 On appelle traditionnellement densité d'un corps le rapport de sa masse volumique à celle de l'eau (s'il s'agit d'un solide ou d'un liquide) ou de l'air (s'il s'agit d'un gaz). A la température de 0 °C, la densité de la glace vaut 0,917 et celle du gaz carbonique 1,526. Déterminer les masses volumiques de ces substances. ▲ Rép. $0{,}917.10^{3}\ kg/m^{3}$; $1{,}975\ kg/m^{3}$.

7-2 Quelle est la densité du mercure, de l'eau et de l'air ? Voir la définition à l'exercice précédent et les valeurs de la masse volumique au § 33.

7-3 Calculer la masse d'une bille d'acier de 3 cm de diamètre. Masse volumique de l'acier: $7{,}7.10^{3}\ kg/m^{3}$. ▲ Rép. 109 g.

7-4 Une colonne de pierre (masse volumique $\cong 3\ kg/dm^{3}$) a approximativement la forme d'un cylindre de 70 cm de diamètre et de 7 m de haut. Quelle est sa masse ?

7-5 Un fil de cuivre a une longueur de 250 m et une masse de 30 kg. Quel est son diamètre ? Masse volumique du cuivre: $8{,}92.10^{3}\ kgm^{-3}$. ▲ Rép. 4,14 mm.

7-6 Calculer le rayon d'une boule de verre dont la masse vaut 1 kg. Masse volumique du verre: $2{,}7.10^{3}\ kgm^{-3}$.

7-7 Un homme courant à une vitesse de 4 m/s saute sur un chariot immobile et s'assied dessus. Les masses de l'homme et du chariot valent respectivement 60 et 20 kg. Quelle est la vitesse finale du chariot ? ▲ Rép. 3 m/s.

7-8 On tire une balle de fusil, horizontalement, dans une pièce de bois suspendue à un fil et immobile. La balle s'y arrête. Les masses de la balle et du bois sont respectivement 3 g et 3 kg. Après le choc, le bois a une vitesse de 0,4 m/s. Quelle était la vitesse initiale de la balle ?

7-9 Une boule de plastiline a une masse de 100 g et une vitesse de 5 m/s. Elle heurte une seconde boule qui se meut sur la même droite, mais en sens inverse, à une vitesse de 1 m/s. La seconde boule a une masse de 300 g. Les deux boules se collent. Quelle est la vitesse finale du système ? ▲ Rép. 0,5 m/s, dans le sens de la vitesse de la première boule.

7-10 Un petit wagon de bois de masse M roule sans frottement, à une vitesse U, sur une piste horizontale. On lui tire dessus une balle de fusil ayant une masse m et une vitesse u, dans la direction et le sens de son mouvement. Ensuite, on tire sur lui une seconde balle en sens inverse. Calculer la grandeur de la vitesse après le premier et après le second tir, sachant que les balles sont restées dans le wagon. Application numérique: U = 2 m/s, u = 500 m/s, M = 1 kg, m = 20 g.

7-11 Pour déterminer la masse d'un objet, on le lance à une vitesse de 4 m/s contre un objet immobile dont la masse est connue et vaut 0,5 kg. On observe que l'objet incident est rejeté en arrière à une vitesse de 2,48 m/s, tandis que l'objet heurté acquiert une vitesse de 0,54 m/s. Calculer la masse inconnue. ▲ Rép. 0,0417 kg.

7-12 Un objet a une masse de 1 kg. Il arrive à une vitesse de 1,5 m/s contre un objet immobile, de masse inconnue. L'objet heurté est expulsé à une vitesse de 0,8 m/s, tandis que l'objet incident revient en arrière à une vitesse de 0,3 m/s. Calculer la masse de l'objet heurté.

7-13 Sur un rail à coussin d'air, un glisseur de 400 g arrive à une vitesse de 2 m/s contre un glisseur de 600 g, venant en sens inverse à une vitesse de 1 m/s. Le premier objet est rejeté en arrière à une vitesse de 1,6 m/s. Calculer la vitesse finale du second. ▲ Rép. 1,4 m/s en sens contraire de sa vitesse initiale.

7-14 Sur un rail, un wagonnet de 4 kg roulant à une vitesse de 2 m/s entre en collision avec un wagonnet de 1 kg, roulant en sens inverse à une vitesse de 6 m/s. Le premier wagonnet est repoussé en arrière à une vitesse de 1,2 m/s. Quelle est la vitesse finale de l'autre wagonnet ?

7-15* Deux objets se heurtent perpendiculairement et restent collés l'un à l'autre. L'un a une masse double de l'autre. Leurs vitesses initiales ont la même grandeur. Quelle est la vitesse du système final. ▲ Rép. 74,5 % de la vitesse initiale; 26,6° avec l'une des vitesses initiales.

7-16* Une bille de plastiline possède une vitesse $\vec{u}$. Une seconde bille heurte la première et se colle à elle. Le système final a une vitesse de même grandeur que la première bille, mais de direction perpendiculaire. Les deux billes ont même masse. Déterminer la vitesse initiale de la seconde bille.

7-17* A quelle vitesse un corps doit-il se mouvoir pour que sa masse
- augmente de 1 ‰ ▲ Rép. 0,045.c
- devienne 10 fois plus grande ? 0,995.c

7-18* Quelle est la masse d'une particule dont la vitesse vaut
- 200'000 km/s
- 90% de c ?

7-19* Une bicyclette roule à une vitesse constante $\vec{v}$ sur une route droite. Ses roues ont un rayon R. Calculer l'accélération d'un point du pneu relativement à un référentiel lié à la route. ▲ Rép. v^2/R.

7-20* Une hélice d'avion tourne à une vitesse angulaire ω. Ses pales ont une longueur L. L'avion avance en ligne droite à une vitesse constante $\vec{v}$ relativement au sol. Calculer l'accélération d'une des extrémités des pales, pour un référentiel lié à la terre.

$\vec{F}$

Exercices relatifs au chapitre 8: FORCES

8-1 Deux forces perpendiculaires ont pour grandeur 5 et 12 N. Déterminer la grandeur de leur résultante et l'angle qu'elle fait avec la force de 12 N. ▲ Rép. 13 N; 22,6°.

8-2 Deux forces de 10 N font entre elles un angle de 120°. Déterminer la grandeur et la direction de leur résultante.

8-3 Une force de 5 N fait avec une force de 7 N un angle de 35°. Calculer la grandeur de la résultante et l'angle qu'elle forme avec chacune des forces données. ▲ Rép. 11,5 N; 20,5°; 14,5°.

8-4 Déterminer la résultante de trois forces concourantes et coplanaires, sachant qu'elles ont la même grandeur F et que deux d'entre elles forment avec la troisième des angles égaux α. ($\alpha \leq 90°$). Application numérique: F = 2 N, $\alpha = 20°$.

8-5 Une grue soulève un bloc de pierre de 500 kg posé sur le sol. Le long du premier mètre de son ascension, le bloc subit une accélération de 1 m/s^2. Ensuite il a une vitesse constante. Calculer la force exercée par le câble sur le bloc dans

le premier mètre et dans la suite. ▲ Rép. 5500 N; 5000 N.

8-6 Un camion est à disposition pour remorquer une voiture en panne. Comme corde de remorquage, on ne dispose que d'une grosse ficelle pouvant supporter au maximum une force de 1000 N. La masse de la voiture est de 1 tonne, et le frottement qu'elle subit vaut 400 N. Quelle est l'accélération maximale que le camion peut se permettre ?

8-7 Une locomotive de 100 tonnes remorque un wagon de 30 tonnes. Au départ, le convoi a une accélération constante. On observe qu'il met 25 s pour atteindre la vitesse de 36 km/h. La force de frottement sur le wagon étant estimée à 5000 N, calculer la force exercée par le crochet sur le wagon.
▲ Rép. 17'000 N.

8-8 Une masse m est suspendue à un fil qui peut supporter sans se casser une traction maximum L. La masse étant initialement immobile, on veut l'élever d'une hauteur h dans le temps le plus bref possible. Calculer ce temps.
Application numérique: m = 10 kg, L = 11 kg*, h = 5 m.

8-9 La cage d'une essoreuse a un diamètre intérieur de 50 cm. Elle tourne à raison de 10 tours par seconde. Un objet ayant une masse de 100 g se trouve dans la machine. Que vaut la force exercée par la cage sur l'objet ? On néglige la pesanteur.
▲ Rép. 98,7 N.

8-10 Un petit miroir est fixé sur l'axe d'un moteur. Le rayon de l'axe est de 1 cm. Le moteur tourne à raison de 300 tours par seconde. La masse du miroir est de 10 g. Calculer la grandeur de la force exercée par l'axe sur le miroir. La pesanteur est négligeable.

8-11 Un skieur de 60 kg passe à une vitesse de 60 km/h sur une bosse, puis dans une dépression dont les rayons de courbure mesurent 35 m. Calculer la force de soutien exercée par la neige lorsque le skieur est au sommet de la bosse et lorsqu'il est au fond de la dépression. ▲ Rép. 124 N; 1076 N.

8-12 Un homme tient à la main une ficelle de longueur L à laquelle est attachée une pierre de masse m. Il la fait tourner dans un plan vertical. Le mouvement de la main est imperceptible.
a) Calculer la traction de la ficelle lorsque la pierre est en haut de sa trajectoire, sachant que la vitesse en ce point est v_1.
b) Calculer la traction de la ficelle lorsque la pierre est en bas de sa trajectoire, sachant que la vitesse en ce point est v_2.

8-13 Un camion de 3 tonnes roule à la vitesse de 72 km/h sur une route horizontale. Quelle force constante faut-il lui appliquer pour l'arrêter sur une distance de 100 m ? Calculer le rapport entre cette force et le poids du camion. ▲ Rép. 6000 N; 1/5.

8-14 Une boule est lancée avec une vitesse u sur un plan horizontal. Elle subit une force de frottement dix fois plus petite que son poids.
a) Quelle distance franchit-elle avant de s'arrêter ?
b) Combien de temps roule-t-elle ?

8-15 Un objet de 2 kg est suspendu à une poutre par deux fils perpendiculaires l'un à l'autre. L'un d'eux fait un angle de 30° avec l'horizontale. Calculer les forces de traction des deux fils. ▲ Rép. 10 N; 17,3 N.

8-16 Deux fils mesurant respectivement 60 et 80 cm sont attachés à deux points de même altitude et distants de 1 m. Ces fils sont liés à un objet de 5 kg retenu en l'air par leur moyen. Calculer les forces de traction des deux fils.

8-17 Une planche a 2 m de long. Une de ses extrémités repose sur le sol. L'autre est fixée au bord d'une table de 80 cm de haut. Un petit wagon descend le long de cette planche. Il part de l'extrémité supérieure avec une vitesse initiale nulle.
a) Combien de temps met-il pour arriver au sol ?
b) A quelle vitesse y arrive-t-il ? ▲ Rép. 1 s; 4 m/s.

8-18 On lâche un wagonnet sur un plan incliné où le frottement est négligeable. Après 5 s, il a parcouru 1,5 m. Quel est l'angle du plan ?

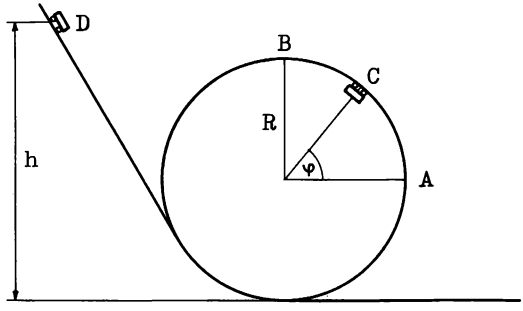
8-19 Une voiture de masse m monte à vitesse constante une côte d'inclinaison α. Elle subit une force de frottement F.
a) Calculer la force de propulsion.
b) Calculer l'accélération de la voiture si le conducteur débraye.
Application numérique: m = 1200 kg, $\alpha = 5{,}7°$, F = 300 N.
▲ Rép. 1500 N; 1,25 ms^{-2}.

8-20 Les stations extrêmes d'un funiculaire sont à une distance d l'une de l'autre, cette distance étant comptée le long de la voie. La dénivellation entre les stations est h. La pente de la voie est constante. Chaque voiture a une masse m, circule à une vitesse constante et subit une force de frottement F. Calculer la force exercée par le câble sur la voiture montante et sur la voiture descendante.
Application numérique: m = 5000 kg, d = 1,5 km, h = 300 m, F = 1000 N.

8-21 Une voiture roule à une vitesse de grandeur v. Elle se trouve dans un virage dont le rayon de courbure est R. La route est parfaitement verglacée, mais l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal est tel que la voiture passe sans encombre. Calculer cet angle.
Application numérique: v = 100 km/h, R = 400 m. ▲ Rép. 10,9°.

8-22 Une bille tourne horizontalement dans un entonnoir assimilable à un cône d'axe vertical. La génératrice fait avec l'axe un angle α. Calculer le temps de révolution de la bille en fonction de α et de la hauteur h entre le sommet du cône et le plan horizontal où le mouvement a lieu.

8-23* Un wagonnet de masse m roule sans frottement sur la piste en colimaçon représentée ci-contre. Le rayon de la boucle vaut R. Le mobile part avec une vitesse initiale nulle d'un point situé à une hauteur h au-dessus du point le plus bas de la boucle. Lorsque le wagonnet est dans la boucle, on repère sa position à l'aide de l'angle φ indiqué par le dessin.



Si la hauteur h est assez grande, le wagonnet suit la piste sans encombre. Si h est trop faible, le mobile quitte la piste entre A et B. Si h est encore plus faible, le wagonnet n'atteint même pas le point A.
a) Calculer la force exercée par la piste sur le wagonnet au point C, en fonction de sa vitesse en ce point.
b) A quelle condition la vitesse en C doit-elle satisfaire pour que le wagonnet parvienne effectivement en ce point ?
Voir la suite de l'exercice en 15-27.

▲ Rép. $\frac{mv^2}{R} - mg \sin\varphi$; $v \geq \sqrt{Rg \sin\varphi}$.

8-24* Un pendule de masse m et de longueur L oscille dans un plan vertical. On désigne par α l'angle formé par le fil avec la verticale orientée vers le bas. Calculer la tension du fil en fonction de la vitesse v du mobile et de l'angle α.
Application numérique: m = 200 g, L = 1,5 m, v = 3 m/s, $\alpha = 20°$.

8-25* Un wagonnet de masse M roule sans frottement sur un plan d'inclinaison α. Un fil parallèle aux lignes de pente du plan le tire vers le haut. Le fil passe sur une poulie située au

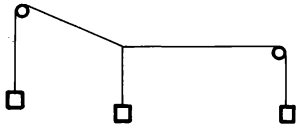
haut du plan incliné et retient un contrepoids de masse m suspendu en l'air. Calculer l'accélération de chaque mobile et la tension du fil. Envisager les deux sens possibles de l'accélération.

▲ Rép. $\frac{|m - M \sin\alpha|.g}{m + M}$; $\frac{mMg(1 + \sin\alpha)}{m + M}$.

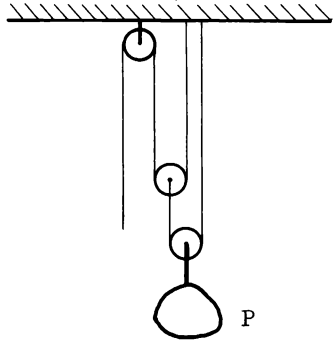
8-26* Une masse m est suspendue à un fil passant sur une poulie. A l'autre bout du fil est suspendue une masse M, plus grande que m. Le fil et la poulie ont une masse négligeable.
a) Calculer l'accélération a de la masse m et la traction T du fil.
b) Si la masse M augmente indéfiniment, a et T tendent-ils vers l'infini ou non ? Dans la négative, calculer les valeurs limites.

8-27* Deux lampes de 12 kg sont fixées par des câbles à deux maisons situées de part et d'autre d'une rue. Chaque lampe est attachée à une maison par un câble incliné à 20°. En outre, les deux lampes sont liées par un câble horizontal. Les poids des câbles étant négligeables, calculer la force de traction de chacun d'eux. ▲ Rép. 330 N; 351 N.

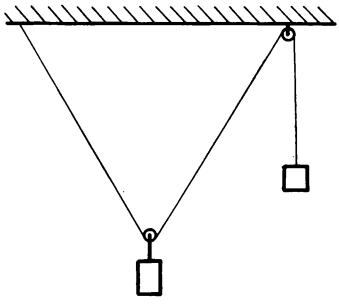
8-28* Trois fils attachés l'un à l'autre et retenant différents objets, passent sur deux poulies comme l'indique le dessin ci-contre. L'objet qui se trouve entre les poulies a un poids de 2 N. Dans le voisinage du point d'attache, un des fils est horizontal et un autre fait un angle de 25° avec l'horizontale. Calculer les poids des deux objets extérieurs.



8-29* A l'aide du système de poulies dessiné ci-contre, on soulève un objet de poids P. Les cordes et les poulies ont un poids négligeable devant P.
a) Calculer la force qui doit être exercée à l'extrémité libre de la corde.
b) Quel chemin cette extrémité doit-elle parcourir pour que l'objet s'élève d'une hauteur h.
▲ Rép. P/4; 4 h.



8-30* Un objet de poids p est attaché à l'extrémité d'un fil. Ce fil passe sur deux poulies, comme l'indique le dessin, et vient se fixer à un plafond. La poulie inférieure et l'objet qui lui est suspendu ont un poids total P. La poulie supérieure et le point d'attache du fil sont à une distance a. A quelle distance du plafond la poulie inférieure possède-t-elle sa position d'équilibre ? A quelle condition les grandeurs données doivent-elles satisfaire pour que la position d'équilibre existe ? Les dimensions des poulies sont négligeables devant a.



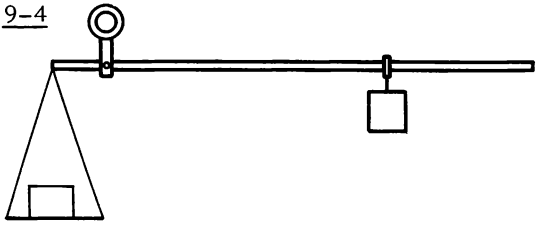
Exercices relatifs au chapitre 9: STATIQUE DES SOLIDES

9-1 Une barre de fer de 60 kg repose horizontalement sur deux appuis. Elle a une longueur de 3,5 m. Les appuis sont respectivement à 50 cm et à 1 m des extrémités. Calculer les forces qui la soutiennent. ▲ Rép. 225 N; 375 N.

9-2 Une poutre de 80 kg est encastrée horizontalement dans un mur vertical. La partie cachée a une longueur de 60 cm et la partie saillante, une longueur de 1,4 m. Calculer les forces exercées par le mur sur la poutre. Préciser les points où elles s'appliquent. (On suppose que le mur n'exerce que deux forces, et qu'elles sont verticales.)

9-3 On soulève une pierre de 400 kg avec un levier, comme l'indiquent les figures de la page 114. On admet que la pierre exerce sur le levier une force égale à la moitié de son poids. Le levier est une barre de fer de 10 kg, et de 1 m de long. La distance entre le point d'appui du levier et son point de contact avec la pierre est de 10 cm. La main de l'opérateur agit à l'extrémité du levier. Calculer, dans les deux cas indiqués, la force que la main doit exercer sur le levier. ▲ Rép. 178 N; 250 N.

9-4

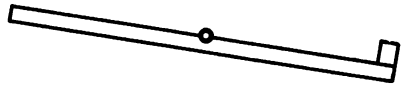


Balance romaine. Une balance est constituée d'une tige dont la masse vaut 200 g et la longueur 50 cm. Cette tige peut tourner autour d'un axe horizontal situé au

dixième de sa longueur. A l'extrémité du petit bras est suspendu un plateau de 850 g. Sur le long bras coulisse un contrepoids de 125 g. Ce bras est gradué, et la position du contrepoids qui réalise l'équilibre renseigne sur la masse d'un objet placé dans le plateau.
a) A quelle distance de l'axe faut-il placer la graduation zéro ?
b) Quelle distance y a-t-il entre les graduations 0, 100 g, 200 g, 300 g, etc. ?
c) Quelle est la plus grande masse qui peut être mesurée avec cette balance ?

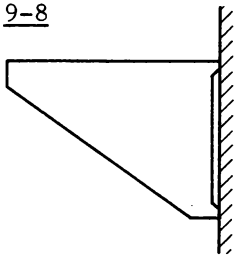
9-5 Une équerre de menuisier, en forme de L, a une masse de 1,2 kg. Un des côtés a une longueur double de l'autre. On la suspend par l'angle droit.
a) Quel est l'angle formé par le côté court avec l'horizontale ?
b) Quelle masse faut-il suspendre à l'une des extrémités pour que les deux côtés aient une inclinaison de 45° ?
▲ Rép. 14,04°; 0,6 kg.

9-6 Une poutre a une masse de 150 kg, une longueur de 4 m, et une section carrée de 20 cm de côté. Elle peut tourner librement autour d'une charnière horizontale située transversalement au milieu d'une de ses faces. Quelle masse faut-il poser sur une de ses extrémités, pour qu'elle se mette dans une position inclinée à 10° ?



9-7 Un bloc de pierre a la forme d'un prisme droit. Sa base, qui est un carré de 30 cm de côté, est posée sur le sol. Sa hauteur est de 60 cm et sa masse de 150 kg. Il est ceinturé par une corde, à 5 cm de son bord supérieur. On tire cette corde horizontalement, de manière à le faire basculer. Il pivote autour d'une de ses arêtes de base. Calculer la force avec laquelle il faut tirer la corde pour que le bloc commence à se soulever. Calculer ce que vaut alors la force exercée par le sol (grandeur et direction). ▲ Rép. 409 N; 1555 N; 74,7° avec le sol.

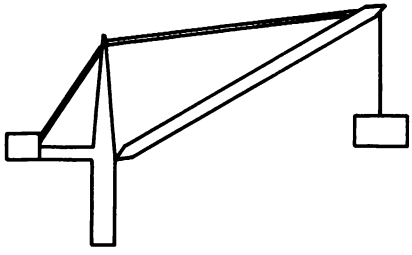
9-8



Une console a la forme indiquée ci-contre. Elle est fixée à un mur par un crochet situé à sa partie supérieure et s'appuie sur ce mur par sa partie inférieure. Il n'y a pas de frottement. La console a une masse m. Son centre de gravité se trouve à une distance a de sa surface supérieure et à une distance b du mur. Le crochet est à une distance c du point d'appui inférieur.

Calculer les forces qui s'exercent sur l'objet (grandeur et direction).

9-9* Le bras d'une grue a une masse M, une longueur L et une inclinaison α. Le câble qui soutient l'extrémité du bras forme avec lui un angle β. Le câble tracteur suit le trajet du premier câble jusqu'à l'extrémité du bras, puis descend verticalement et soutient un objet de masse m. Calculer la force avec laquelle est tendu le câble qui soutient le bras. Application numérique: M = 2000 kg, m = 1500 kg; L = 15 m, $\alpha = 30^{o}$, $\beta = 20^{o}$. ▲ Rép. 48300 N.



9-10* Deux hommes portent un bahut de 100 kg dans un escalier incliné à 40^{o}. Ils exercent des forces verticales sur les angles du plateau de base. Le meuble a 2 m de long et 1 m de haut. Calculer les forces exercées par les porteurs.

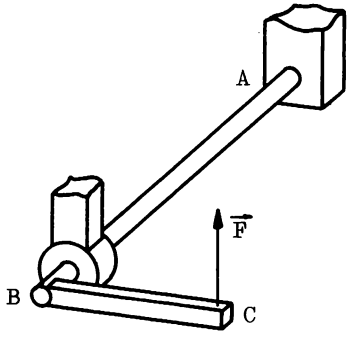
9-11* Une planche de 30 kg et de 3 m de long repose horizontalement sur un mur de 1,2 m de large. Elle dépasse de 80 cm d'un côté et de 1 m de l'autre. Un homme de 60 kg est sur cette planche. Jusqu'à quelle distance des extrémités peut-il aller ? ▲ Rép. 45 cm; 75 cm.

9-12* On dispose d'une planche de 20 kg et d'un bloc de pierre de 25 kg. La planche a 2 m de long. Est-il possible d'installer la planche sur une table de manière qu'elle en dépasse le bord de 1,40 m ? Si oui, quel est le domaine où le contrepoids peut être mis ?

9-13* Un tableau de 120 cm x 80 cm est suspendu horizontalement à un mur par deux anneaux distants de 70 cm et situés à son bord supérieur. Quelle est l'inclinaison prise par le tableau si l'un des points de suspension se rompt ?
▲ Rép. $41,2^{o}$.

9-14* Un cadre rectangulaire mesure 40 cm x 30 cm. Quel est l'angle formé par les côtés avec l'horizontale si on le suspend par un des angles ?

9-15* Un système de suspension est constitué par une barre de torsion AB installée comme l'indique le schéma ci-contre. Le bras BC a une longueur de 30 cm. Lorsque le système est détendu, ce bras est horizontal. On exerce en C une force verticale $\vec{F}$.



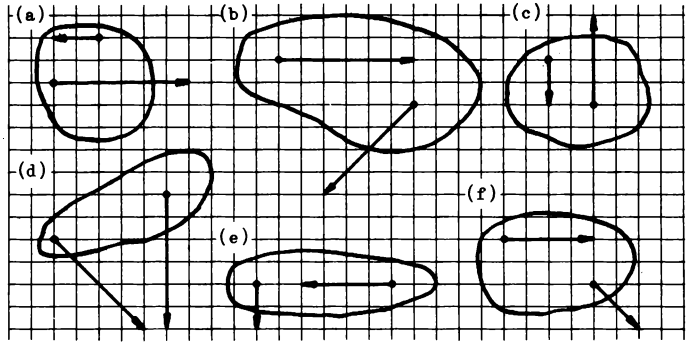
a) Une force de 5000 N produit une torsion de 20°. Calculer la constante de torsion. Tenir compte du fait que $\vec{F}$ n'est pas perpendiculaire au bras BC.

b) Calculer les angles de torsion produits par des forces de 1000 et 2000 N. Dans ces cas, on peut considérer que l'angle de torsion est petit. ▲ Rép. $4{,}04.10^{3}$ Nm; 4,26°; 8,51°.

9-16* Un fil a une constante de torsion de $1{,}6.10^{-2}$ Nm. On y suspend un cylindre de 5 cm de diamètre et on réalise le dispositif esquissé dans la dernière figure du paragraphe 52. Calculer les masses qu'il faut suspendre si l'on veut que le système subisse une torsion
a) de deux tours complets,
b) de 75°.

9-17* a) Montrer que si les conditions d'équilibre sont satisfaites relativement à une origine O, elles le sont aussi relativement à toute autre origine O'.
b) Montrer que si la seconde condition d'équilibre est satisfaite relativement à deux origines O et O', la première condition est automatiquement satisfaite.

9-18* Les figures ci-dessous représentent des solides rigides auxquels sont appliquées des forces. Déterminer graphiquement la résultante de chaque système de forces.



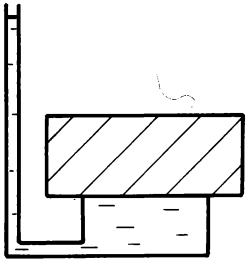
Exercices relatifs au chapitre 10: STATIQUE DES FLUIDES

10-1 Les chenilles d'un bulldozer reposent sur le sol sur une longueur de 6 m chacune. Quelle doit être leur largeur si l'engin a une masse de 18 tonnes et que la pression sur le sol ne doit pas dépasser 0,5 kg*/cm^2 ? ▲ Rép. 30 cm.

10-2 Une patineuse a une masse de 50 kg. Les lames de ses patins ont une largeur de 2 mm. Quelle est la pression exercée sur la glace lorsqu'elle se tient sur un pied, si la lame est en contact avec la glace sur une longueur de 20 cm ?

10-3 Au pied d'une colline, un baromètre indique une pression de 75,4 cm Hg. Calculer la pression au sommet de la colline, situé 200 m plus haut. Masse volumique de l'air: 1,293 kg/m^3. ▲ Rép. 73,5 cm Hg.

10-4 On a construit un tube de Torricelli avec de la glycérine. La masse volumique de ce liquide est de 1,26 kg/dm^3. Quelle est la hauteur de la colonne de glycérine si la pression atmosphérique vaut 1 atm ? Quel peut être l'intérêt d'un tel baromètre ?



10-5 Le bloc de pierre représenté ci-contre a une masse de 120 kg. Sa base, horizontale, ferme un tuyau dont le diamètre est de 20 cm. Ce tuyau communique avec un petit tuyau vertical d'un diamètre de 2 cm. Le système contient de l'eau. Initialement, dans chaque branche du tube, l'eau atteint la même hauteur. Quelle quantité faut-il en ajouter dans le petit tuyau pour que le bloc soit soulevé ? ▲ Rép. 1,2 dm^3.

10-6 Dans une maison à six étages, le réseau de distribution d'eau est équipé de robinets dont l'orifice a un diamètre intérieur de 1,2 cm. Au sixième étage, si l'on veut retenir l'eau en appliquant son pouce contre l'ouverture d'un robinet, on doit exercer une force de 30 N. Quelle force doit-on exercer si l'on veut faire cela au rez-de-chaussée ? La hauteur d'un étage est de 3 m.

10-7 En haute altitude, on mesure une pression de 52 cm Hg. Exprimer cette pression en Pa et en mb. ▲ Rép. 69400 Pa, 694 mb.

10-8 Montrer que la pression atmosphérique normale vaut 1,033 kg*/cm^2.

10-9 Un cycliste de 50 kg roule sur une bicyclette de 10 kg. Le poids est également réparti sur les roues. Chaque pneu est en contact avec le sol sur une surface de 10 cm^2. Calculer la pression de gonflage des pneus. ▲ Rép. 3 atm (au-dessus de la pression atmosphérique).

10-10 Un ballon parfaitement souple est gonflé à la pression de 1,2 atm (au-dessus de la pression atmosphérique), et est posé sur le sol. Un homme de 80 kg se tient sur le ballon. Calculer le rayon de la portion de ballon qui est en contact avec le sol.

10-11 Une plaque de liège flotte sur de l'eau. Elle a une épaisseur de 1 cm et une aire de base de 100 cm^2. La masse volumique du liège est de 250 kg/m^3. Un objet de 60 g repose sur cette plaque de liège, la laissant horizontale. Calculer la hauteur immergée. ▲ Rép. 0,85 cm.

10-12 Une personne de 60 kg se trouve sur un radeau de bois flottant sur l'eau. Les dimensions du radeau sont 3 m, 4 m et 10 cm. La masse volumique du bois est de $0{,}9.10^3$ kg/m^3.
a) Calculer la hauteur immergée.
b) De combien la hauteur immergée varie-t-elle lorsque la personne quitte le radeau ?

10-13* Un ballon est retenu au sol par une corde. Il est gonflé à l'hydrogène (masse volumique: 0,09 kg/m^3). L'enveloppe est une sphère de 4 m de rayon. Elle a une masse de 50 kg et soutient une nacelle de 200 kg. Calculer la force avec laquelle est tendue la corde si le ballon se trouve dans de l'air dont la masse volumique vaut 1,35 kg/m^3. ▲ Rép. 88 kg*.

10-14* Un ballon de foire a un diamètre de 30 cm. Le fil qui le retient exerce sur lui une force de 0,08 N. L'enveloppe a une masse de 4,5 g. La masse volumique de l'air est de 1,293 kg/m^3. De ces données, déduire la masse volumique du gaz contenu dans le ballon.

10-15* On veut construire une balise sphérique apte à flotter sur l'eau. Son rayon est fixé à 20 cm, et elle ne doit s'enfoncer dans l'eau que de 6 cm. Quelle masse faut-il lui donner ? ▲ Rép. 2,04 kg.

10-16* Une boule de bois flotte sur l'eau. Elle émerge d'une hauteur égale aux trois dizièmes de son rayon. Quelle est la masse volumique de ce bois ?

10-17* Calculer l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique au sommet du Mont-Blanc. ▲ Rép. 42 cm Hg.

Exercices relatifs au chapitre 11: FROTTEMENTS

Frottement sec

11-1* Un objet de masse m repose sur un plan d'inclinaison α variable. Le coefficient de frottement statique est μ_o. Calculer la valeur maximale de α qui laisse l'équilibre possible.
▲ Rép. $\alpha_{max} = \text{arctg}\,\mu_o$.

11-2* Une pièce de bois repose sur un plan incliné métallique dont la pente augmente progressivement. Le coefficient de frottement statique vaut 0,60. Le coefficient de frottement de glissement vaut 0,42. Calculer l'accélération de la pièce de bois au moment où le glissement se produit.

11-3* Un pâtissier dépose des gâteaux dans un four au moyen d'une palette. Le coefficient de frottement statique des objets sur la palette est de 0,6. Quelle accélération faut-il donner à la palette, dans son mouvement de retour, pour que les gâteaux restent dans le four ? ▲ Rép. au moins 6 m/s^2.

11-4* Une gomme est sur un livre posé à plat sur une table. On donne au livre divers mouvements horizontaux. Le coefficient de frottement statique de la gomme sur le livre vaut 1. Quelle accélération le livre peut-il avoir sans que la gomme glisse ?

11-5* Un objet est lancé à une vitesse v sur un plan horizontal. Le contact est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement μ. Calculer la distance de freinage.
▲ Rép. $v^2/2\mu g$.

11-6* Un solide de masse m glisse sur un plan d'inclinaison α. Le coefficient de frottement de glissement est μ. Le solide part d'un état d'immobilité. Quelle vitesse a-t-il après un parcours de longueur d ?
Application numérique: m = 5 kg, $\alpha = 30^o$, $\mu = 0{,}25$, d = 30 cm.

11-7* Un objet de masse M se trouve sur un plan incliné d'angle α. Le coefficient de frottement μ_o est insuffisant pour le maintenir en équilibre. Un fil parallèle aux lignes de plus grande pente est attaché à l'objet. Au haut du plan incliné, il passe sur une poulie et soutient un contrepoids de masse m suspendu en l'air. Déterminer les limites entre lesquelles m peut varier sans que l'équilibre se rompe.
▲ Rép. $M(\sin\alpha - \mu_o\cos\alpha) \leq m \leq M(\sin\alpha + \mu_o\cos\alpha)$.

11-8* Un objet de masse M glisse sur un plan d'inclinaison α. Il est tiré vers le bas par un fil parallèle aux lignes de pente du plan. Au bas du plan, ce fil passe sur une poulie et

retient un corps de masse m suspendu en l'air. Le coefficient de frottement de l'objet sur le plan est μ. Déterminer la traction du fil et l'accélération des objets lorsqu'ils descendent et sont accélérés vers le bas.

11-9* Une route a un rayon de courbure de 60 m. Le bord extérieur est relevé de sorte que la route a une inclinaison de 15° dans le sens transversal. La ligne médiane de la route est un cercle dans un plan horizontal. On admet que les pneus des voitures ont un coefficient de frottement statique de 0,5. Quelle est la vitesse maximale à laquelle une voiture peut rouler sans déraper ? ▲ Rép. 83 km/h.

11-10* Une voiture de masse m roule à une vitesse v sur une route droite. Les pneus ont un coefficient de frottement statique μ_s. Quelle est la distance minimale sur laquelle la voiture peut s'arrêter sans déraper ? On envisagera les cas suivants:
a) La route est horizontale.
b) La route a une inclinaison α et la voiture monte.
c) La route a une inclinaison α et la voiture descend.

11-11* Une échelle a une longueur de 4 m et une masse de 20 kg. Elle est appuyée contre un mur avec une inclinaison de 60°. Le coefficient de frottement du pied de l'échelle sur le sol est de 0,3. Au contact du mur, on admet que le frottement est négligeable. Un homme de 80 kg veut grimper sur l'échelle. Jusqu'où peut-il aller sans qu'il y ait glissement ? Quelle est l'inclinaison minimale de l'échelle qui lui permettrait d'arriver jusqu'en haut ? ▲ Rép. 2,1 m; 72°.

11-12* Un objet de masse m est posé sur une table horizontale. Le coefficient de frottement statique est μ_s. On exerce sur l'objet une force $\vec{F}$ faisant un angle α avec la verticale, de manière à le presser contre la table, et en même temps à le faire glisser. Quelle doit être la grandeur de la force $\vec{F}$ pour que le glissement se produise ? La réponse trouvée a-t-elle un sens pour toute valeur de α ?
Application numérique: m = 2,5 kg, μ_s = 0,34, α = 15° (puis 20° et 70°).

Frottement dans un fluide

11-13* Calculer la vitesse limite de chute d'une gouttelette de brouillard dont le rayon vaut 0,01 mm. ▲ Rép. 1,2 cm/s.

11-14* Calculer la vitesse limite d'une boule de bois de 1 cm de rayon dans un récipient d'huile. Les densités respectives sont 0,9 et 0,92.

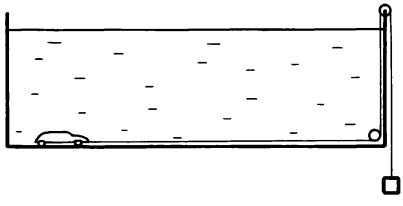
11-15* Un réservoir a une hauteur de 2 m et contient de la glycérine. A sa surface, on disperse des petits grains d'une matière dont la masse volumique vaut 3 kg/dm³. On les assimile à des sphères et on suppose que la vitesse limite est rapidement atteinte. On laisse les grains descendre pendant une heure. Où sont alors ceux dont les diamètres sont de l'ordre de 0,2 mm; 0,5 mm; 1 mm ? ▲ Rép. 0,14 m; 0,87 m; 2 m.

11-16* Calculer la vitesse limite d'une goutte de pluie assimilable à une sphère de 2 mm de rayon. Envisager les deux sortes d'écoulement possibles, et retenir le résultat numériquement le plus plausible.

11-17* Un ballon de football a un diamètre de 24 cm. Quelle est la force que l'air exerce sur lui s'il se déplace à une vitesse de 20 m/s ? Cette force est-elle négligeable devant le poids de l'objet ? ▲ Rép. 2,6 N; non.

11-18* Un skieur descend une pente de 20°. Sa vitesse limite est de 50 km/h. Que vaut sa vitesse limite s'il descend une pente de 30° ? Supposer le frottement proportionnel au carré de la vitesse.

11-19* Dans une cuve remplie d'eau se trouve une petite voiture dont la masse vaut 500 g et la section apparente 20 cm². La voiture est liée par un fil à une masse de 20 g suspendue en l'air. La vitesse limite de la voiture est de 0,8 m/s. Déterminer le coefficient de forme de l'objet. ▲ Rép. 0,31.



11-20* Une boule a un rayon de 3 cm et une masse de 30 g. Elle est suspendue à un fil de 25 cm de long. Le vent qui souffle l'immobilise dans une position où le fil fait un angle de 41° avec la verticale. L'écoulement est turbulent. Calculer la vitesse du vent.

11-21* Un train descend, sans l'action du moteur ni des freins, une pente de 8 ‰. Sa vitesse se stabilise à 100 km/h. On admet que le seul frottement important est celui qu'exerce l'atmosphère. La masse du train est de 300 tonnes.
a) Exprimer le frottement par une formule du type $F = Av^2$ et calculer la constante A.
b) Quelle serait la vitesse limite du train sur une pente de 5 ‰ ? ▲ Rép. 31 Ns^2/m^2; 79 km/h.

11-22* Calculer la vitesse limite d'un skieur descendant sur un plan incliné. On désignera par m la masse totale, par α l'angle du plan, par μ le coefficient de frottement des skis sur la neige, par C le coefficient caractérisant la forme du skieur, par S sa section apparente et par ρ la masse spécifique de l'air.
Application numérique: m = 70 kg, μ = 0,1, C = 0,6, S = 0,4 m^2, ρ = 1,3 kg/m^3, $\alpha = 7^o$ (puis 20^o).

Exercices relatifs au chapitre 12: GRAVITATION

12-1 On a deux boules de plomb dont les diamètres valent respectivement 2 et 16 cm. Il y a entre elles un espace vide de 1 cm. Calculer la force d'attraction exercée par une boule sur l'autre. ▲ Rép. $7{,}65.10^{-9}$ N.

12-2 Calculer les forces d'attraction exercées sur la terre par le soleil et par la lune.

12-3 Calculer l'accélération d'un objet qui se trouve au milieu du segment terre-lune. ▲ Rép. $1{,}07.10^{-2}$ ms^{-2}.

12-4 Où un objet doit-il se trouver pour que les forces de gravitation qu'il subit de la part de la terre et de la lune se compensent exactement ?

12-5 Déterminer l'accélération de la pesanteur à la surface de la lune. ▲ Rép. 1,63 m/s^2.

12-6 La planète Jupiter a un rayon de 69'900 km et une masse volumique moyenne de 1327 kg/m^3. Calculer l'accélération d'un objet qui tombe en chute libre à la surface de cette planète.

12-7 On imagine une petite planète constituée par une boule de 100 m de rayon faite d'une matière dont la masse spécifique est de 4 kg/dm^3.
a) Quel serait le poids d'un habitant de cette planète, si sa masse était de 60 kg ? Exprimer ce poids en g*.
b) Quel temps mettrait un objet pour tomber d'une hauteur de 5 m, sa vitesse initiale étant nulle ? ▲ Rép. 0,67 g*; 299 s.

12-8 a) Déterminer le poids qu'a sur la lune une personne qui sur la terre pèse 60 kg*. Exprimer ce poids en kg*.
b) Si un objet est lancé vers le haut à une vitesse de 2 m/s depuis la surface de la lune, quelle hauteur atteint-il ? Et combien de temps après son départ est-il de retour sur le sol ?

12-9 Calculer le temps de révolution d'un satellite qui décrit une trajectoire circulaire de 384'000 km de rayon autour de la

terre. Exprimer le résultat en jours et en heures. Δ 27 j 9 h.

12-10 Calculer le temps de révolution d'un satellite qui décrit une trajectoire circulaire très près d'un astre de rayon R et de masse volumique ρ. Qu'est-ce que le résultat a de remarquable ?

12-11 Calculer le temps de révolution et la vitesse d'un satellite décrivant une trajectoire circulaire autour de la lune, à une altitude de 100 km au-dessus de sa surface.
Δ Rép. 1,64 km/s; 1 h 58 min.

12-12 La trajectoire de la terre autour du soleil est à peu près un cercle de 149'500'000 km de rayon. Sachant que la terre met une année pour effectuer une révolution, calculer la masse du soleil.

Exercices relatifs au chapitre 13: FORCES D'INERTIE

13-1* Un objet cylindrique, de 10 cm de haut et de 2 cm de rayon est posé par sa base sur un plateau horizontal tournant à raison de $\frac{1}{2}$ tour par seconde. Le frottement est suffisant pour empêcher le glissement. L'objet peut-il être placé en n'importe quel point du plateau sans culbuter ? Si ce n'est pas le cas, indiquer la zone où l'objet peut être posé.
Δ Rép. R $<$ 40 cm.

13-2* Un verre est posé sur une table d'un wagon-restaurant. Sa base a 2 cm de rayon. Le centre de gravité se trouve 6 cm au-dessus. Quelles sont les accélérations maximales que le verre peut supporter sans se renverser ? On suppose qu'il ne glisse pas.

13-3* Un bus freine énergiquement. Son accélération dans le freinage vaut 3 m/s^2. Quelle est l'inclinaison que doivent prendre les passagers debout pour demeurer en équilibre sans se tenir ? Δ Rép. 17° par rapport à la verticale.

13-4* Un cycliste passe à une vitesse de 36 km/h dans un virage dont le rayon de courbure est de 20 m. Quelle est son inclinaison relativement à la verticale ?

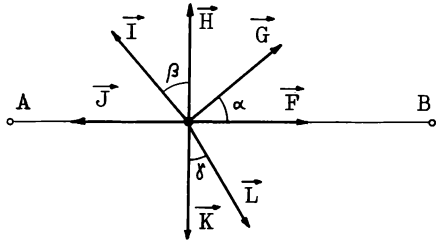
Exercices relatifs au chapitre 14: TRAVAIL

14-1 Un funiculaire relie deux stations distantes de 1 km, entre lesquelles il y a une dénivellation de 300 m. Chaque voiture a une masse de 10 tonnes et subit un frottement de 4000 N. Calculer le travail effectué par chacune des forces (poids,

frottement, force normale, traction du câble) qui s'exercent sur la voiture montante. Faire de même pour la voiture descendante. ▲ Rép. -30 MJ; -4 MJ; 0; 34 MJ; 30 MJ; -4 MJ; 0; -26 MJ. (Rappel: 1 MJ = 1 mégajoule = 10^6 J).

14-2 Un cheval tire une charrette de 100 kg sur un chemin horizontal ayant la forme d'un demi-cercle de 50 m de rayon. Sa vitesse est suffisamment faible pour qu'on puisse considérer l'accélération comme constamment nulle. Le frottement a une grandeur fixe de 200 N. Calculer le travail de chacune des quatre forces qui s'exercent sur la charrette.

14-3 Un point matériel suit un parcours AB dont la longueur est de 5 m. Sept forces s'exercent sur lui. Leur grandeur commune est de 20 N. Deux d'entre elles sont colinéaires à AB. Deux autres sont perpendiculaires. Les trois dernières forment avec les autres les angles indiqués par le dessin. $\alpha = 40^o$, $\beta = 40^o$, $\gamma = 30^o$. Calculer le travail effectué par chacune de ces forces sur le parcours AB. ▲ Rép. 100 J; 76,6 J; 0; -64,3 J; -100 J; 0; 50 J.



14-4* a) Montrer que le treuil mentionné dans l'exemple 1 du paragraphe 55 conserve le travail.
b) Montrer que le système de poulies de l'exercice 8-29 conserve le travail.

E

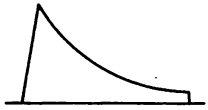
Exercices relatifs au chapitre 15: ENERGIE

15-1 Un train démarre en côte. Sa masse est de 200 tonnes. L'inclinaison de la voie est de 1,5° (pente ≅ 2,6 %). On observe que sur un parcours de 10 m, sa vitesse passe de 4 m/s à 5 m/s. En supposant les frottements négligeables, calculer la force moyenne exercée par les moteurs. ▲ Rép. 142'000 N.

15-2 Un bloc de bois de 2 kg est lancé à la vitesse de 3 m/s sur une planche dont l'inclinaison est de 20°. L'objet monte. Il franchit une distance de 60 cm avant de s'arrêter. Calculer la force de frottement qu'il subit.

15-3 La piste d'un toboggan a une longueur de 5 m et une dénivellation de 2 m. Sa forme est indiquée approximativement

ci-dessous. Un enfant dont la masse est de 20 kg descend sur ce toboggan et subit une force de frottement dont la grandeur est pratiquement constante et égale à 70 N. La vitesse initiale étant de 0,2 m/s, calculer la vitesse finale. ▲ Rép. 2,24 m/s.



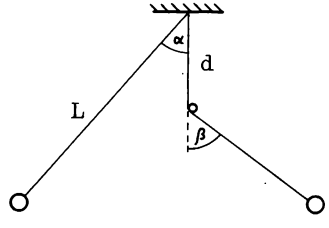
15-4 Au haut d'une pente, à l'altitude de 453 m, un cycliste a une vitesse de 2 m/s. Un peu plus loin, à l'altitude de 427 m, il a une vitesse de 12 m/s. Etudier la variation d'énergie mécanique et faire une conclusion plausible.

15-5 Les stations extrêmes d'un funiculaire sont aux altitudes de 500 et 900 m respectivement. La voie a une pente constante et une longueur de 2 km. Une voiture de 4 tonnes descend à la vitesse de 18 km/h. Soudain, le câble se casse. Quelle vitesse la voiture atteint-elle après avoir parcouru sur la voie une distance de 36 m depuis l'endroit où l'accident a eu lieu. On suppose qu'il n'y a pas de frottements et que les freins de secours ne fonctionnent pas. ▲ Rép. 46,8 km/h.

15-6 Depuis une fenêtre située 20 m au-dessus de la rue, on lance un objet à une vitesse de 10 m/s. Quelle est la grandeur de sa vitesse lorsqu'il arrive au sol, dans les trois cas suivants:
a) l'objet est lancé horizontalement,
b) l'objet est lancé verticalement vers le haut,
c) l'objet est lancé verticalement vers le bas.

15-7 Un pendule simple de masse m et de longueur d part d'une position dans laquelle le fil fait un angle α avec la verticale. Calculer sa vitesse maximale et sa vitesse lorsque le fil fait un angle β avec la verticale.
▲ Rép. $\sqrt{2gd(1 - \cos\alpha)}$; $\sqrt{2gd(\cos\beta - \cos\alpha)}$.

15-8 On a un pendule de longueur L. Une tige horizontale est fixée sous le point d'attache, à une distance d de celui-ci. Elle est perpendiculaire au plan dans lequel oscille le pendule. Les angles formés par le fil avec la verticale lorsque le pendule est aux extrémités de sa trajectoire sont désignés par α et β ($\alpha < \beta$). Calculer β en fonction de α, L et d.



15-9 Calculer la vitesse de libération du champ de gravitation de la lune, pour un objet situé à la surface de celle-ci. ▲ Rép. 2,38 km/s.

15-10 Calculer la vitesse de libération pour des mobiles situés à des altitudes de 1000, 2000 et 3000 km au-dessus de la terre.

15-11 Un objet est lancé verticalement depuis la surface de la terre à une vitesse de 10 km/s. Quelle altitude atteint-il si le frottement de l'atmosphère est négligeable ?
▲ Rép. 25'000 km.

15-12 Un objet est lâché avec une vitesse initiale nulle d'un point situé à 40'000 km du centre de la terre. Quelle vitesse a-t-il lorsqu'il arrive sur la terre, si le frottement de l'atmosphère est négligeable ?

15-13 Lorsqu'il est contracté par deux forces opposées de 10 N chacune, un ressort se raccourcit de 2 cm. On lui fait subir une contraction de 6 cm et on le maintient dans cet état au moyen d'un fil. On le place horizontalement et on l'appuie contre un mur. De l'autre côté, on appuie contre le ressort une bille de 100 g. A quelle vitesse la bille est-elle expulsée lorsqu'on brûle le fil ? On suppose négligeable la masse du ressort. ▲ Rép. 4,24 m/s.

15-14 Un wagon dont la masse est de 20 tonnes roule à une vitesse de 3,6 km/h sur une voie de garage horizontale. Il arrive contre un buttoir constitué de deux tampons fixés à d'énormes ressorts, eux-mêmes fixés à un socle de béton. On sait que pour faire subir à l'un ou à l'autre des ressorts une contraction de 1 mm, il faut exercer sur lui une force de 100 kg*.
a) Calculer la contraction que provoque le choc du wagon contre le buttoir.
b) Déterminer la vitesse à laquelle le wagon est renvoyé.

15-15* Une météorite passe à une vitesse de 6 km/s en un point situé à une altitude de 30'000 km au-dessus de la surface de la terre. Elle s'approche de la terre en décrivant une trajectoire non rectiligne.
a) Calculer sa vitesse lorsqu'elle a une altitude de 1000 km.
b) Indiquer le nom de sa trajectoire. Justifier la réponse donnée. ▲ Rép. 11,1 km/s; hyperbole.

15-16* Un projectile est lancé obliquement depuis la surface de la terre, à une vitesse v_o . Au sommet de sa trajectoire, sa vitesse a la valeur v. Calculer l'altitude de ce point. Distinguer les cas selon l'ordre de grandeur de la vitesse initiale.
Applications numériques: a) $v_o = 10$ km/s, $v = 5$ km/s.
b) $v_o = 10$ m/s, $v = 5$ m/s.

15-17* Un objet de masse m est posé sur un ressort vertical,

et, à cause de son poids, lui provoque ainsi une contraction a. On presse sur l'objet, de façon à le faire descendre d'une distance b, puis on le lâche. Jusqu'à quelle altitude l'objet est-il lancé ? On calculera l'altitude relativement au niveau de l'extrémité du ressort détendu. ▲ Rép. $(b^2 - a^2)/2a$.

15-18* Un chariot de masse m descend le long d'un plan d'inclinaison α où le frottement est négligeable. Il arrive à une vitesse v_0 contre un ressort de constante k posé sur le plan et fixé à sa partie inférieure. Calculer la contraction maximale du ressort.

15-19* Deux wagonnets, dont les masses valent respectivement 800 g et 200 g sont immobiles sur une voie horizontale. Ils sont appuyés de part et d'autre d'un ressort tendu. Le ressort a été comprimé par une force de 10 N qui lui a imposé une déformation de 10 cm. Calculer les vitesses acquises par les wagonnets lorsque le ressort se détend. On admet que le ressort communique aux mobiles toute son énergie. ▲ Rép. 0,5 m/s; 2 m/s.

15-20* Un fusil lance des balles de 20 g à une vitesse de 600 m/s. L'arme a une masse de 5 kg. Calculer
a) la vitesse de recul du fusil,
b) le rapport des énergies emportées par la balle et par le fusil,
c) l'énergie chimique en réserve dans la cartouche en admettant que 40 % de cette énergie se perd en chaleur lors de l'explosion.

15-21* Un wagonnet de masse M est initialement immobile sur un plan horizontal. Un fil horizontal est accroché au wagonnet, passe sur une poulie et retient un objet de masse m suspendu en l'air. A un moment donné, on laisse le wagonnet se mettre en marche. Calculer la vitesse acquise après un parcours de longueur d. Distinguer les deux cas suivants:
a) Le frottement est négligeable.
b) Il existe un frottement F.

▲ Rép. $\sqrt{\frac{2mgd}{m + M}}$; $\sqrt{\frac{2mgd - 2Fd}{m + M}}$.

15-22* Refaire l'exercice précédent en remplaçant le plan horizontal par un plan d'inclinaison α, la poulie étant située au bas du plan.

15-23* Un objet de masse m est lancé à une vitesse v_0 sur une surface horizontale où son coefficient de frottement est μ. Calculer la distance qu'il franchit avant de s'arrêter.
Application numérique: m = 2 kg, v_0 = 5 m/s, μ = 0,1.
▲ Rép. $v_0^2/2\mu g$ = 12,5 m.

15-24* Un wagonnet de masse m descend le long d'un plan d'inclinaison α. Son coefficient de frottement vaut μ. En un point P, le wagonnet a une vitesse u. Calculer sa vitesse lorsqu'il se trouve à une distance d du point P. Envisager les deux cas possibles.

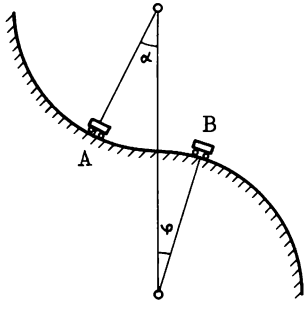
15-25* Une petite boule de masse m est attachée à l'extrémité d'un fil de longueur L. L'autre extrémité du fil est fixe. Le fil peut supporter une force égale au double du poids de la boule. On tend le fil horizontalement puis on laisse tomber la boule. Le fil se casse-t-il ? Si oui, pour quel angle entre le fil et la verticale ? ▲ Rép. 48,2°.

15-26* Une pierre de masse m est reliée à un point fixe par une ficelle de longueur L. Elle tourne dans un plan vertical. Elle a, au point le plus bas de sa trajectoire, une vitesse v_0.
a) Calculer la traction de la ficelle lorsque celle-ci fait un angle α avec la verticale. (On choisit l'angle α de manière qu'il soit nul lorsque le mobile est au point le plus bas.)
b) La longueur de la ficelle étant donnée, quelle condition la vitesse v_0 doit-elle remplir pour que la ficelle reste toujours tendue ?

15-27* Suite de l'exercice 8-23.
a) Calculer la force exercée par la piste sur le wagonnet, en un point quelconque C, en fonction de la hauteur de départ h.
b) Calculer l'angle φ pour lequel le wagonnet quitte la piste. Quelle est alors la vitesse ?
c) Quelle condition doit satisfaire h pour que le wagonnet ne quitte jamais la piste ?

▲ Rép. $\frac{mg}{R}(2h - 2R - 3R \sin\varphi)$; arc sin $\frac{2h - 2R}{3R}$; $\sqrt{\frac{2g(h-R)}{3}}$; $h > \frac{5R}{2}$.

15-28* Un wagonnet de masse m descend une piste ayant la forme de deux arcs de cercles de rayons R disposés comme l'indique le dessin. Le mobile part du point A où la normale à la piste fait un angle α avec la verticale. Les frottements sont négligeables.



a) Calculer la vitesse du wagonnet et la force exercée sur lui par la piste lorsqu'il est au point B, où la normale à la piste fait un angle φ avec la verticale.
b) Déterminer la valeur $\hat{\varphi}$ de l'angle φ pour laquelle le wagonnet quitte la piste.

E

15-29* Un lac artificiel contient 400'000'000 m^3 d'eau. Son centre de gravité est à une altitude de 2250 m. L'usine électrique qu'il alimente est à 1600 m. Calculer l'énergie disponible dans ce lac. Si on obtenait cette énergie à partir de réactions nucléaires, quelle est la masse de "combustible" qui disparaîtrait ? ▲ Rép. $2{,}6.10^{15}$ J; 29 g.

15-30* On suppose qu'il existe un procédé industriel pour synthétiser de l'hélium à partir de deutérium. La masse d'un deuton est: $3{,}344.10^{-27}$ kg, et celle d'une particule α: $6{,}646.10^{-27}$ kg. Quelle est l'énergie libérée par la synthèse d'un kilogramme d'hélium ? Ne pas tenir compte des électrons.

P

Exercices relatifs au chapitre 16: PUISSANCE

16-1 Un cyclomotoriste met une minute pour parcourir un tronçon de route dont la longueur vaut 300 m et la dénivellation 30 m. La masse du véhicule avec le conducteur est de 100 kg. Calculer la puissance développée par le moteur, en chevaux. ▲ Rép. 0,67 Ch.

16-2 Un homme de 60 kg monte des escaliers. Il met 20 s pour s'élever de 14 m. Calculer la puissance qu'il développe, en W et en Ch.

16-3 Un étudiant s'endort à sa table de travail. Il laisse sa lampe allumée toute la nuit, à savoir durant 7 heures. Sur l'ampoule, on peut lire: 60 Watts, 220 Volts. Quelle est la dépense occasionnée par cet incident si le kWh est payé 16 centimes ? ▲ Rép. 6,7 cts.

16-4 Un moulin à café consomme 300 Watts. On l'utilise une minute chaque jour. Combien de temps (années, mois, jours) doit-il s'écouler pour que la dépense d'énergie électrique s'élève à 1 franc ? Le kWh revient à 10 centimes.

16-5 Un train a une masse de 250 tonnes. Il roule à une vitesse constante de 100 km/h. La force de frottement qu'il subit de la part de l'air vaut 20'000 N. Quelle est la puissance développée par la locomotive dans les trois cas suivants ?
a) La voie est horizontale.
b) La voie a une pente de 1 % et le train monte.
c) La voie a une pente de 0,5 % et le train descend.
▲ Rép. 0,56 MW; 1,25 MW; 0,21 MW.

16-6 Une locomotive de 100 tonnes a une puissance maximale de 3 MW. Elle remorque 8 wagons de 25 tonnes. Le train roule à 72 km/h et subit une force de frottement de 15'000 N de la part de l'air. Quelle est l'accélération maximale que le train

peut avoir dans les deux cas suivants ?
a) La voie est horizontale.
b) Le train monte sur une pente de 1 %.

16-7* Une automotrice de montagne parcourt un chemin montant dont la longueur est de 15 km et la pente moyenne de 5 %. La masse de l'automotrice est de 20 tonnes. Si le kWh revient à 8 centimes quel est le prix de revient d'une montée ? On admet que le rendement global est de 70 %. ▲ Rép. 4,76 Fr.

16-8* Quel est le coût de l'énergie nécessaire pour lancer à la vitesse de 72 km/h sur une voie horizontale un train ayant une masse de 200 tonnes ? Un kWh revient à 6 centimes. On admet qu'il y a 40 % d'énergie perdue.

16-9* Une pompe à incendie produit un jet dont la vitesse vaut 30 m/s et le débit 20 litres/s. Si le rendement de la pompe est de 80 %, quelle doit être la puissance du moteur qui l'entraîne ? ▲ Rép. 11,3 kW.

16-10* Quelle est la puissance électrique qu'on peut tirer d'une chute d'eau d'un débit de 800 litres/min et d'une hauteur de 150 m, si le rendement de l'installation est de 60 % ?

16-11* On suppose que l'énergie électrique fournie par une centrale nucléaire est consacrée à hisser des trains de marchandises jusqu'au tunnel du Gotthard. La dénivellation est de 700 m. On admet que la transformation de l'énergie nucléaire en énergie électrique a un rendement de 20 % et que 25 % de l'énergie électrique consommée par les locomotives se perd en chaleur. Combien peut-on faire monter de trains de 1000 tonnes avec l'énergie qui apparaît lorsque le combustible de la centrale a diminué sa masse d'un gramme ? ▲ Rép. 1930.

16-12* Le moteur d'une voiture développe un couple maximal de 128 m.N à une fréquence de 50 s^{-1}. On suppose que le moteur fonctionne dans ces conditions. Le rapport de pont est 3,89. Ceux de la boîte à vitesse sont: I: 3,40; II: 1,94; III: 1,32; IV: 0,97. Le rayon des roues est de 28 cm. On admet que les engrenages ne dissipent pas d'énergie. Calculer, pour les différents rapports de la boîte à vitesse, la fréquence de rotation des roues, le moment du couple disponible sur celles-ci, et la force motrice de la voiture.

16-13* En roue libre sur une pente de 5 ‰, un train de 300 tonnes descend à une vitesse constante de 80 km/h. La locomotive a une puissance de 4 MW. Quelle est la vitesse maximale que le train pourrait atteindre sur une voie horizontale ? On suppose le frottement proportionnel au carré de la vitesse. ▲ Rép. 183 km/h.

Exercices relatifs au chapitre 17: CHOCS

Pour d'autres problèmes de choc, voir numéros 7-7 à 7-16.

17-1 Le choc analysé à l'exercice 7-11 est-il élastique ? ▲ Rép. non.

17-2 Le choc analysé à l'exercice 7-12 est-il élastique ?

17-3 Une bille de 50 g arrive à une vitesse de 10 m/s sur une seconde bille, identique à la première et immobile. La trajectoire de la bille incidente subit une déviation de 26^{o}. En admettant que le choc est élastique, calculer les grandeurs des vitesse finales des deux mobiles. Déterminer la direction de la vitesse acquise par la seconde bille. ▲ Rép. 9,0 m/s; 4,4 m/s; 64^{o}.

17-4 Sur un rail à coussin d'air, des glisseurs de 200 g et 600 g effectuent une collision. Un observateur prétend avoir fait les mesures suivantes:
Vitesses initiales en sens inverse: resp. 2,5 m/s et 1 m/s.
Vitesses finales, également en sens inverse: 3,2 m/s et 0,9 m/s.
Ces résultats sont-ils plausibles ?

17-5* Une bille de 12 g arrive à une vitesse de 5 m/s contre une bille de 20 g, immobile. Après le choc les vitesses des billes forment des angles respectifs de 30^{o} et 20^{o} avec la direction de la particule incidente. Calculer les grandeurs des vitesses finales. Le choc est-il élastique ? ▲ Rép. 2,23 m/s; 1,96 m/s; non.

17-6* Une particule ayant une vitesse de $5{,}34.10^{7}$ m/s heurte une particule dont la masse est quatre fois plus grande. Cette seconde particule a une vitesse initiale négligeable. Le choc est élastique. Sachant que la trajectoire de la particule incidente subit une déviation de $64{,}6^{o}$, déterminer les vitesses des deux particules après le choc (grandeur et direction).

17-7* Une particule arrive à une vitesse de 100 km/s contre une particule de masse double venant en sens inverse avec une vitesse deux fois plus petite. La première particule subit une déflexion de 90^{o}. Calculer la déflexion de l'autre particule et les grandeurs des vitesses finales. Le choc est élastique. ▲ Rép. 90^{o}; 100 km/s; 50 km/s.

17-8* Deux points matériels de même masse effectuent un choc élastique. Leurs vitesses initiales sont perpendiculaires. Montrer qu'il en est de même de leurs vitesses finales.

17-9* Une boule de masse m possède une vitesse $\vec{v}$. On veut l'ar-

rêter en lançant contre elle une boule de masse $\frac{1}{2}m$. A quelle vitesse faut-il lancer celle-ci ? On suppose le choc central et élastique. ▲ Rép. $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

17-10* Une boule de masse m, ayant une vitesse $\vec{u}$, effectue un choc central et élastique sur une boule de masse double et de vitesse double venant contre elle en sens inverse. Calculer les vitesses finales.

17-11* Deux billes dont les masses sont 50 g et 100 g sont suspendues à des fils de 50 cm de long. Les fils sont attachés au même point. La grosse bille étant immobile, on écarte la petite de sa position d'équilibre, de manière que son fil de suspension fasse un angle de 30° avec la verticale, puis on la lâche. Elle effectue un choc central et élastique contre l'autre bille. Calculer les angles maximaux formés par les fils avec la verticale lors de leur première oscillation après le choc. ▲ Rép. 9,9°; 19,9°.

17-12* Deux pendules simples sont attachés au même point. Ils sont constitués par des fils de longueur L auxquels sont fixées des petites boules de terre glaise assimilables à des points matériels. Leurs masses sont m_1 et m_2 respectivement. Le pendule de masse m_2 étant à l'état d'équilibre, on immobilise l'autre dans une position où les deux fils font un angle α. Le pendule de masse m_1 est ensuite lâché. Il heurte le pendule de masse m_2 et se colle à lui. Calculer l'angle formé par les fils avec la verticale lorsque les deux boules réunies atteignent leur altitude maximale.
Application numérique: $m_1 = 10$ g, $m_2 = 20$ g, L = 30 cm, $\alpha = 40°$

Exercices relatifs au chapitre 18: IMPULSION

18-1 Un mobile a une masse de 50 kg et une vitesse initiale de 8 m/s. Une force de 100 N, parallèle à la vitesse initiale, s'exerce sur lui
a) pendant 20 secondes,
b) sur un trajet de 20 mètres.
Calculer la vitesse finale dans les deux cas. Utiliser les théorèmes de variation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement. ▲ Rép. 48 m/s; 12 m/s.

18-2 Un objet est lancé en l'air à une vitesse $\vec{v_0}$ formant un angle α avec l'horizontale. Utiliser le théorème de variation de la quantité de mouvement pour calculer le temps qu'il met pour atteindre son point culminant.

18-3 Un ballon de 500 g arrive perpendiculairement contre un mur à une vitesse de 20 m/s et rebondit à une vitesse de même

$\vec{J}$

grandeur. Calculer la force moyenne exercée sur le ballon par le mur en admettant que le contact dure 0,005 s. ▲ Rép. 4000 N.

18-4 Un marteau de 1 kg s'abat sur un clou à une vitesse de 5 m/s. Quelle est la force moyenne exercée sur le clou, si le contact dure 0,01 s ?

18-5* Un tuyau d'arrosage souple éjecte de l'eau à une vitesse de 10 m/s. Sa section est de 3 cm^2. Calculer la force que la main du jardinier doit exercer sur l'extrémité du tuyau, dans le sens du jet, pour qu'il ne file pas en arrière. ▲ Rép. 30 N.

18-6* Calculer la force ascensionnelle s'exerçant sur un hélicoptère dont l'hélice a un rayon de 3 m et chasse vers le bas une colonne d'air à la vitesse de 25 m/s.

$\vec{L}$

Exercices relatifs au chapitre 19: MOMENT CINETIQUE

19-1* Une comète passe dans le champ de gravitation du soleil en décrivant une branche d'hyperbole dont les demi-axes valent $a = 4.10^{10}$ m et $b = 3.10^{10}$ m.
a) Calculer sa vitesse lorsqu'elle est très loin du soleil.
b) Calculer sa distance minimale au soleil, et sa vitesse lorsqu'elle est à son périhélie. ▲ Rép. $5{,}76.10^4$ m/s; 10^{10} m; $1{,}73.10^5$ m/s.

19-2* Un satellite décrit une trajectoire elliptique autour de la terre. Lorsqu'il se trouve à son périgée, sa vitesse vaut 9 km/s et son altitude au-dessus de la terre, 600 km.
a) Calculer sa vitesse et son altitude lorsqu'il est à son apogée.
b) Calculer les demi-axes de l'ellipse et la vitesse aux extrémités du petit axe.

19-3* Complément à l'exemple 3 du paragraphe 114, p. 282. Un projectile est lancé obliquement depuis la surface de la terre. Sa vitesse initiale a une grandeur $v_0 = 10$ km/s et forme un angle $\alpha = 40^0$ avec l'horizontale. Calculer les demi-axes de l'ellipse qu'il décrit. On suppose connue la vitesse de libération: $u = 11{,}2$ km/s. ▲ Rép. $a = u^2R/2(u^2 - v_0^2) = 1{,}57.10^7$ m; $b = v_0 R \cos\alpha / \sqrt{u^2 - v_0^2} = 9{,}67.10^6$ m.

19-4* Une planète décrit autour du soleil une ellipse de demi-axes a et b. Calculer ses vitesses maximale et minimale, et sa distance au soleil lorsque ces situations se réalisent. Application numérique: (valeurs correspondant à Mercure) $a = 5{,}79.10^{10}$ m, $b = 5{,}66.10^{10}$ m.

19-5* Calculer l'énergie mécanique d'un satellite de masse m qui décrit une trajectoire elliptique de demi-axes a et b autour d'un astre de masse M. ▲ Rép. $-\frac{1}{2}GMm/a$.

Exercices relatifs au chapitre 20: MOUVEMENT HARMONIQUE

20-1 Un ressort de constante k, disposé horizontalement, a une extrémité fixe et une extrémité libre. Contre cette dernière, un wagonnet de masse m vient buter avec une vitesse v.
a) Quelle est la déformation maximale du ressort ?
b) Quelle est la durée du contact du wagonnet avec le ressort ?
c*) Combien faut-il de temps pour que le wagonnet ralentisse sa vitesse de la valeur v à la valeur u ?
Application numérique: k = 0,1 kg*/cm, m = 500 g, v = 1 m/s, u = 0,8 m/s. ▲ Rép. 7,07 cm; 0,222 s; 0,045 s.

20-2 Un wagonnet est placé sur une voie horizontale sur laquelle on suppose le frottement négligeable. Sa masse est de 120 g. Il est lié par un ressort à un point fixe. Une force de 100 g* appliquée sur le wagonnet parallèlement à la voie détermine un déplacement de 5 cm.
a) Calculer la fréquence de cet oscillateur.
b) On place de l'autre côté du wagonnet un ressort identique au premier. Calculer la nouvelle fréquence.
c) Le système étant dans cette situation, on donne au mouvement une amplitude de 10 cm. Quelle est la vitesse maximale ?

20-3 Quelle doit-être la longueur d'un pendule pour qu'il batte la seconde ? (qu'une demi oscillation dure 1 s). Utiliser la valeur: $g = 9{,}81\ ms^{-2}$. ▲ Rép. 0,994 m.

20-4 Calculer la période du pendule boiteux décrit dans l'exercice 15-8.
Application numérique: L = 2,2 m, d = 1 m.

20-5 Comment varie l'amplitude d'un oscillateur harmonique lorsque son énergie totale subit une diminution de 40 % ?
▲ Rép. Elle diminue de 22,5 %.

20-6 Un oscillateur harmonique a une constante de rappel k et une masse m. Son mouvement a une amplitude A. En quel point et à quel moment son énergie cinétique est-elle égale à son énergie potentielle ?

20-7* Calculer la vitesse maximale qu'aurait un objet qui traverserait la terre dans un tunnel rectiligne passant par son centre, en admettant qu'il n'y ait pas de frottement et que l'objet soit lâché depuis la surface de la terre.
▲ Rép. $7{,}91.10^3$ m/s.

20-8* Un mobile animé d'un mouvement harmonique a une vitesse maximale de 5 m/s. Entre deux instants consécutifs où la vitesse s'annule, il s'écoule 0,2 s. Calculer l'amplitude de l'oscillation.

20-9* Un petit objet de masse m est fixé à deux fils. Ces fils ont une même longueur L. Ils ont une masse négligeable et sont disposés suivant une même droite, de part et d'autre du petit objet. Leurs extrémités sont attachées à deux points fixes et le système est tendu par une force de grandeur F. Le petit objet peut ainsi se déplacer dans le plan médiateur des deux points d'attache. Montrer que c'est un oscillateur harmonique et calculer sa fréquence propre. On supposera la pesanteur négligeable et on se limitera à des oscillations de faible amplitude de manière que la tension des fils puisse être considérée comme constante.
Application numérique: m = 100 g, L = 80 cm, F = 50 N.
Δ Rép. $\sqrt{2F/mL}\,/2\pi = 5{,}63\ s^{-1}$.

20-10* Déterminer la période d'oscillation d'un kg de mercure placé dans un tube en U de 50 mm^2 de section.

Exercices relatifs au chapitre 21: SYSTEMES MATERIELS

21-1* Trois points matériels sont alignés. Leurs masses sont de 5, 3 et 8 kg. Il y a entre les deux premiers une distance de 24 cm et entre les deux derniers une distance de 45 cm. Déterminer le centre de gravité du système. Δ Rép. à 15 cm du 2e point, et à 30 cm du 3e.

21-2* Quatre points matériels ont respectivement les coordonnées (2;2), (1;1), (-1;1), (-2 cm;2 cm) et les masses 1, 2, 3 et 4 kg. Déterminer leur centre de gravité.

21-3* Un objet de 1 kg se trouve à 30 cm d'un objet de 200 g. Où est le centre de masse ? Δ Rép. à 5 cm du 1er objet et à 25 cm du 2e.

21-4* A quelle distance de l'écorce terrestre le centre de masse du système terre-lune se trouve-t-il ?

21-5* On a cinq points matériels de même masse. Quel déplacement subit le centre de gravité du système si l'un des points subit un déplacement $\vec{a}$, tandis que les quatre autres points demeurent immobiles ? Δ Rép. $\vec{a}/5$.

21-6* On considère deux systèmes de points matériels et le barycentre G' et G" de chacun d'eux. Démontrer que le barycentre du système total coincide avec le barycentre des points G' et G", auxquels on attribue les masses respectives des deux systèmes. Quelle est l'utilité de ce résultat ?

21-7* Un ressort de masse négligeable est comprimé par deux

forces de 60 N, opposées l'une à l'autre. Il subit ainsi une déformation de 10 cm. On le laisse se détendre entre deux objets initialement immobiles, ayant des masses de 200 et 400 g. Calculer la vitesse et l'énergie cinétique acquises par chaque objet. ▲ Rép. 4,47 m/s; 2,24 m/s; 2 J; 1 J.

21-8* Un wagonnet a une masse de 1 kg. Il roule sur des rails horizontaux à une vitesse de 6 m/s. Il vient butter contre un wagonnet immobile dont la masse est de 2 kg. Le choc est élastique.
a) Quelle sont les vitesses finales des wagonnets ?
b) Quelle est la vitesse du barycentre du système constitué par les wagonnets, avant et après le choc ?

21-9* Deux cosmonautes ayant chacun, avec leur attirail, une masse de 80 kg, sont liés par une corde de 20 m. Le système subit une rotation de 0,01 tour par seconde. En tirant sur la corde, ils se rapprochent jusqu'à ce que leur distance soit de 2 m. Calculer leur nouvelle fréquence de rotation, et la tension de la corde dans les situations initiale et finale.
▲ Rép. 1 s^{-1}; 3,16 N; 3160 N.

21-10* Un cosmonaute de 80 kg se trouve dans l'espace. Il voit s'approcher de lui un objet de 20 kg, à une vitesse de 2 m/s. La trajectoire de cet objet passe à 5 m de lui. A l'instant où l'objet se trouve près de lui, il l'attrape habilement au lasso. L'objet restant à une distance de 5 m de lui, calculer la période de rotation du système et la force avec laquelle le lasso est tendu.

Exercices relatifs au chapitre 22: DYNAMIQUE DES FLUIDES

22-1* Un avion vole à la vitesse de 200 m/s. Ses ailes ont une forme telle que la vitesse d'écoulement de l'air est plus grande au-dessus qu'au-dessous. On admet qu'elle vaut 230 m/s au-dessus et 200 m/s au-dessous. La surface utile des ailes vaut 220 m^2. Là où vole l'avion, la masse volumique de l'air vaut 0,6 kg/m^3. Calculer la force qui soutient l'avion.
▲ Rép. $8{,}5.10^5$ N.

22-2* Un chalet est exposé au vent qui souffle à 100 km/h. Son toit, qu'on peut considérer comme à peu près horizontal, a une surface de 80 m^2. La masse volumique de l'air vaut 1,2 kg/m^3. Calculer la force exercée par l'air sur le toit du chalet, à cause de la différence entre les pressions interne et externe. (On admet qu'on peut utiliser la loi de Bernoulli entre des points extérieurs et intérieurs, vu qu'ils appartiennent à des lignes de courant voisines.)

22-3* Le système d'aération d'une voiture comporte un tuyau s'ouvrant à l'avant du véhicule. Calculer la surpression qui règne à l'ouverture de ce tuyau, si la vitesse de l'air y est petite. La voiture roule à 100 km/h et la pression atmosphérique est de 1 atm. ▲ Rép. 0,005 atm.

22-4* Une conduite de gaz subit un étranglement. Deux tuyaux latéraux débouchent dans cette conduite, l'un à l'étranglement, l'autre plus loin. Les deux tuyaux latéraux sont reliés aux deux branches d'un tube en U contenant un liquide. Calculer le débit de gaz en fonction de la dénivellation entre les deux ménisques du liquide. Introduire les paramètres utiles.

22-5* Un récipient cylindrique, de section S, contient du liquide jusqu'à une hauteur h. Au bas du récipient, on ouvre un tuyau d'écoulement, de section s. Calculer l'altitude du niveau du liquide en fonction du temps.

▲ Rép. $z = h - \sqrt{\frac{2ghs^2}{S^2 - s^2}}.t + \frac{gs^2}{2(S^2 - s^2)}.t^2$.

22-6* Un tonneau cylindrique est posé sur le sol. Son axe est vertical. Il contient de l'eau jusqu'à une hauteur h. Où faut-il faire un trou dans la paroi latérale, si l'on veut que le jet d'eau arrive sur le sol le plus loin possible ?

Exercices relatifs au chapitre 23: ROTATION DES SOLIDES

23-1* Une roue de vélo a une masse de 1 kg et un diamètre de 60 cm. On admet que la masse est entièrement située à la périphérie. La roue est entraînée par une chaîne passant sur un pignon denté de 6 cm de diamètre. Calculer l'accélération angulaire de la roue, lorsqu'elle est en l'air et que la chaîne est tendue par une force de 100 N. ▲ Rép. 33 s^{-2}.

23-2* On a une roue ajourée, dont la masse est pratiquement toute à la périphérie. Cette masse vaut 150 g et le diamètre de la roue est de 8 cm. Pour mettre la roue en mouvement, on enroule une ficelle autour de son axe (dont le diamètre vaut 4 mm), et on la tire avec une force de 30 N. Que vaut alors l'accélération angulaire de la roue ?

23-3* Le rotor d'un moteur électrique a un moment d'inertie de 0,1 kgm^2. Le moteur étant initialement immobile, on y fait passer le courant pendant une seconde puis on l'interrompt. Le moment du couple est de 2 m.N. Quel est le nombre de tours effectués par le moteur pendant les deux secondes qui ont suivi l'enclenchement ? ▲ Rép. 4,77.

23-4* Une toupie a un moment d'inertie de 200 g.cm². Lorsqu'on la fait tourner à raison de 50 tours par seconde, elle reste debout pendant 30 s. On admet qu'elle ne tombe que lorsque sa vitesse angulaire est négligeable. Calculer le moment du couple de freinage qui s'exerce sur elle, et le nombre de tours qu'elle effectue depuis la situation initiale jusqu'à l'arrêt.

23-5* Un fil est enroulé sur un cylindre de masse m_1 et de rayon R. Ce cylindre peut tourner librement autour d'un axe horizontal. L'extrémité libre du fil est attachée à un contrepoids de masse m_2 suspendu en l'air.
a) Quelle est l'accélération du contrepoids ?
b) Si celui-ci est initialement immobile, quelle vitesse a-t-il après être descendu d'une hauteur h ?
▲ Rép. $2m_2 g/(2m_2 + m_1)$; $\sqrt{4m_2 gh/(2m_2 + m_1)}$.

23-6* Un wagonnet de masse m_1 est sur une voie horizontale. Il est tiré par un fil horizontal qui passe sur une poulie et retient un contrepoids de masse m_2 suspendu en l'air. La poulie est une roue pleine, de masse m_3 et de rayon R.
a) Calculer l'accélération du wagonnet.
b) Calculer la vitesse acquise par le wagonnet lorsqu'il a fait un parcours de longueur d depuis l'arrêt.

23-7* Calculer l'accélération d'une boule placée sur un plan d'inclinaison φ, si le frottement est pratiquement nul.
▲ Rép. $g \sin\varphi$.

23-8* Faire l'exercice 21-9 en utilisant la notion de moment d'inertie.

23-9* Une tige de métal a une longueur de 50 cm. On veut la suspendre à un axe horizontal qui la traverse perpendiculairement, de manière qu'elle oscille dans un plan vertical.
a) A quelle distance d'une extrémité faut-il faire le trou, si on veut que sa période soit de 1,1 s ?
b) Quelle est la plus petite période d'oscillation que le système peut avoir ? Où est le trou correspondant ?
▲ Rép. 30,8 cm; 39,2 cm; 1,078 s; 35,6 cm.

23-10* Deux sphères de plomb de 1 cm de rayon sont fixées aux extrémités d'une tige d'acier de 10 cm de long et de 2 mm de diamètre. Le système est suspendu par son centre de gravité à un fil métallique vertical. Il oscille avec une période de 25 s. Calculer la constante de torsion du fil.

INDEX

Les numéros renvoient aux paragraphes.

Accélération, 16
 - angulaire, 51, 132
 - normale, tangentielle, 19
 - de la pesanteur, 27
Action et réaction, 38
Amortissement, 118
Archimède (Principe d'), 61
Atmosphère, 59

Balistique, 28, 90, 114
Baromètres, 59, 63
Barycentre, 50, 121
Bernoulli (Equation de), 129
Bohr (Modèle de), 113
Bras de levier, 47

Capillarité, 62
Centre de gravité, 50, 121
 - de masse, 121
 - - (Théorème du), 122
Centrifugeuse, 79
Champ (Notion de), 73
Cheval-vapeur, 95
Choc, 34, 36
 - central, 103
 - élastique, 101
 - mou, 100
Chute libre, 27
Cinématique, 6
 - des rotations, 132
Cinétique (Energie), 86
 - (Moment), 111
Comète, 114
Composition des forces, 37
Conditions d'équilibre, 49
Conservation de l'énergie, 89, 91, 92, 101
 - du moment cinétique, 112, 125
 - de la quantité de mouvement, 34, 100, 125
 - du travail, 84
Conservatives (Forces), 88
Continuité (Equation de), 129
Couple, 51, 97
Courbure (Rayon de), 17

Date, 6
Débit, 129
Décapoise, 68
Dynamique, 37
 - des fluides, 129
 - des solides, 132
 - des systèmes 121
Dynamomètre, 40

Ecoulement d'un fluide, 68, 129
Elastique (Choc), 101
 - (Déformation), 53
Energie cinétique, 86
 - de liaison, 93
 - d'un corps en rotation, 135
 - d'un système, 124
 - et masse, 92
 - mécanique, 89, 91
 - potentielle, 88
Equilibre, 41, 49, 58
 - (Stabilité d'un), 54
Equipotentielle (Surface), 88
Erreurs, 3

Fluides (Statique des), 56
 - (Dynamique des), 129
Force, 37
 - centrale, 112
 - centrifuge, 79
 - conservative, 88
 - d'inertie, 77
 - extérieure, intérieure, 48
Fréquence, 115
 - circulaire, 115
Frottement, 42
 - dans un fluide, 68
 - de glissement, 65
 - statique, 66
Fusée, 78, 107

Galilée (Transformation de), 32
Galiléen (Référentiel), 31
 - (Référentiel non), 77
Gravitation, 71
Gyroscope, 136

Harmonique (Mouvement), 115
Hodographe, 12, 16
Horaire, 7
Hydrogène (Atome d'), 113
Hydrostatique, 56

Impulsion, 106
Incertitudes, 4
Inertie (Loi d'), 30
 - (Forces d'), 77
 - (Moment d'), 133
Isolé (Système), 34, 125

Jet d'eau, 29, 108
 - oblique, 28
Joule, 81, 86

Képler (Lois de), 75
Kilogramme, 2, 33
 - force, 39
Kilogrammètre, 81
Kilopond, 39
Kilowattheure, 95

Leviers, 50, 84
Lévigation, 69
Liaison de particules, 93
Libération (Vitesse de), 90
Lignes de courant, 68, 129

Machines simples, 84
Manomètres, 57, 64
Masse, 33, 35
 - (Centre de), 121
 - et énergie, 92
 - volumique, 33, 64
Mètre, 2, 6
Moment cinétique, 111
 - - (Théorème du), 123, 134
 - d'inertie, 133
 - d'un couple, 51
 - d'une force, 47, 49
Mouvement central, 112
 - circulaire uniforme, 22, 23
 - du centre de masse, 122
 - harmonique, 115, 127, 137
 - képlérien, 75, 114
 - rectiligne, 9, 21
 - - uniforme, 14
 - sinusoïdal, 115, 127, 137
 - uniforme, 13, 24
 - uniformément accéléré, 25

Newton, 37
 - (Lois de), 37, 38, 71

Oscillateur, 115, 137
 - amorti, 118
 - double, 127
 - forcé, 119
Osculateur (Plan, Cercle), 17

Parachute, 70
Pascal, 56
 - (Principe de), 57
 - (Tonneau de), 60
Pendule, 117, 137
 - balistique, 105
 - conique, 44
 - de torsion, 52, 137
 - physique, 137
Période, 115
Pesanteur, 39, 72
 - (Accélération de la), 27, 72
Pitot (Sonde de), 131
Plan incliné, 43, 139
Plank (Constante de), 93, 113
Pneu (Gonflage d'un), 60
Poids, 39, 121
Pompe, 59, 130
Poussée, 61
Précession, 136
Presse hydraulique, 57
Pression, 56
 - atmosphérique, 59, 64
 - dans un fluide, 58
 - d'un gaz, 109
 - (Unités de), 59
Produit vectoriel, 46
Puissance, 95
 - d'une turbine, 98
 - d'un moteur, 97
Pulsation, 115

Quantification, 113
Quantité de matière, 33
 - de mouvement, 34, 106, 125
Quantum, 93, 113

Rappel (Force de), 115
 - (Moment de), 137
Recul, 36
Référentiel, 8
 - accéléré, 77
 - d'inertie, 31
 - du barycentre, 124, 125
 - galiléen, 31
Réflexion d'une particule, 104
Relativité, 32, 35, 92
 - des mouvements, 8
Rendement, 96
Résonance, 119
Ressorts, 40, 88, 116
Résultante, 37, 53
Rigides (Corps), 53
Rotations, 79, 132, 138

Satellite, 74, 126
Seconde, 2, 6
SI, 2
Stabilité d'un équilibre, 54
Statique, 41
 - des fluides, 56
 - des solides, 46
Steiner (Règle de), 133
Stokes (Formule de), 68
Système d'unités, 2
 - isolé, 34, 125
 - matériel, 121

Temps, 6
Tension superficielle, 62
Torricelli (Formule de), 130
 - (Tube de), 59
Torsion (Pendule de), 52, 137
Transformations, 32
Travail, 81
Treuil, 55
Turbine, 98

Uniforme (Mouvement), 13, 24
Uniformément accéléré (-), 25
Unités, 2

Vases communicants, 60
Vecteurs glissants, 53
Venturi (Jauge de), 131
Viscosité, 68
Vitesse, 12
 - angulaire, 23, 132
 - de libération, 90
 - limite de chute, 69

Watt, 230

TABLE DES MATIERES

		Pages
Avant-propos		5
Chapitre 1: INTRODUCTION		
§ 1	La mécanique	7
§ 2	Le système international d'unités	8
§ 3	Erreurs	10
§ 4	Incertitudes	11
§ 5	Exemples de calcul	15
Chapitre 2: HORAIRES		
§ 6	L'espace et le temps	17
§ 7	Horaires	18
§ 8	La relativité des mouvements	20
§ 9*	Mouvement rectiligne	21
§ 10*	Mouvement plan	22
§ 11	Exemples de calcul	23
Chapitre 3: VITESSE		
§ 12	Définition de la vitesse	25
§ 13	Mouvement uniforme	27
§ 14*	Mouvement rectiligne uniforme	29
§ 15	Exemples de calcul	30
Chapitre 4: ACCELERATION		
§ 16	Définition de l'accélération	36
§ 17	Cercle osculateur et plan osculateur	38
§ 18	Direction et sens de l'accélération	39
§ 19*	Accélération tangentielle et accélération normale	40
§ 20	Exemples de calcul	43
Chapitre 5: MOUVEMENTS PARTICULIERS		
§ 21	Mouvement rectiligne - Rappels	50
§ 22	Mouvement circulaire uniforme - Première étude	50
§ 23*	Mouvement circulaire uniforme - Etude analytique	51
§ 24	Mouvement uniforme quelconque	53
§ 25	Mouvement uniformément accéléré	54
§ 26	Exemples de calcul	57
Chapitre 6: CHUTE LIBRE		
§ 27	Accélération de la pesanteur	64
§ 28*	Balistique	65
§ 29	Exemples de calcul	68

Chapitre 7: MASSE ET QUANTITE DE MOUVEMENT

§ 30 Inertie 72
§ 31 Référentiels galiléens 73
§ 32* Transformation de Galilée 75
§ 33 Première définition de la masse 78
§ 34 Quantité de mouvement 80
§ 35* Définition de la masse 82
§ 36 Exemples de calcul 84

Chapitre 8: FORCES

§ 37 Equation fondamentale de la dynamique 87
§ 38 Action et réaction 90
§ 39 Pesanteur 91
§ 40 Dynamomètre 92
§ 41 Statique du point matériel 93
§ 42 Frottement 95
§ 43 Plan incliné 96
§ 44 Pendule conique 97
§ 45 Exemples de calcul 99

Chapitre 9: STATIQUE DES SOLIDES

§ 46 Produit vectoriel 106
§ 47 Moment d'une force 107
§ 48 Forces intérieures et extérieures 108
§ 49 Conditions d'équilibre 109
§ 50 Applications des conditions d'équilibre 112
§ 51 Couple 115
§ 52* Pendule de torsion 116
§ 53* Corps rigides 117
§ 54* Stabilité d'un équilibre 119
§ 55 Exemples de calcul 121

Chapitre 10: STATIQUE DES FLUIDES

§ 56 Pression 127
§ 57 Principe de Pascal 128
§ 58 Loi de croissance de la pression 131
§ 59 Pression atmosphérique 133
§ 60 Applications diverses 136
§ 61 Principe d'Archimède 139
§ 62* Tension superficielle et capillarité 140
§ 63* Corrections barométriques 142
§ 64 Exemples de calcul 143

Chapitre 11: FROTTEMENTS

§ 65* Frottement de glissement 148
§ 66* Frottement statique 149
§ 67* Exemples de calcul - Frottement sec 150
§ 68* Frottement dans un fluide 153
§ 69* Vitesse limite de chute 157
§ 70* Exemples de calcul - Frottement dans un fluide 159

Chapitre 12: GRAVITATION

§	71	Loi de la gravitation	163
§	72	Pesanteur	165
§	73	Notion de champ	166
§	74	Satellite sur orbite circulaire	167
§	75*	Mouvement képlérien	169
§	76	Exemples de calcul	170

Chapitre 13: FORCES D'INERTIE

§	77*	Référentiels non galiléens	175
§	78*	Référentiel en translation uniformément accélérée	176
§	79*	Référentiel en rotation uniforme	179
§	80*	Exemples de calcul	183

Chapitre 14: TRAVAIL

§	81	Définition du travail	186
§	82	Propriétés du travail	188
§	83	Applications	190
§	84*	Conservation du travail	192
§	85	Exemples de calcul	194

Chapitre 15: ENERGIE

§	86	Energie cinétique	195
§	87	Applications	198
§	88	Energie potentielle	200
§	89	Conservation de l'énergie mécanique	206
§	90	Vitesse de libération	208
§	91*	Variation de l'énergie mécanique	213
§	92	Equivalence de la masse et de l'énergie	215
§	93*	Liaison de deux particules	217
§	94	Exemples de calcul	222

Chapitre 16: PUISSANCE

§	95	Puissance	230
§	96*	Rendement	232
§	97*	Puissance d'un moteur	233
§	98*	Puissance d'une turbine	235
§	99	Exemples de calcul	237

Chapitre 17: CHOCS

§	100	Choc parfaitement mou	241
§	101	Choc élastique	242
§	102	Choc élastique de deux objets de même masse	243
§	103*	Choc central et élastique	245
§	104*	Réflexion contre une paroi	248
§	105	Exemples de calcul	250

Chapitre 18: IMPULSION

§ 106 Impulsion et variation de la quantité de mouvement 260
§ 107* Force de propulsion d'une fusée 262
§ 108* Force exercée par un jet d'eau sur une paroi 263
§ 109* Pression d'un gaz 264
§ 110 Exemples de calcul 266

Chapitre 19: MOMENT CINETIQUE

§ 111* Moment cinétique 271
§ 112* Mouvement central 272
§ 113* L'atome d'hydrogène - Modèle de Bohr 274
§ 114* Exemples de calcul 279

Chapitre 20: MOUVEMENT HARMONIQUE

§ 115 Oscillateur harmonique 285
§ 116 Objet suspendu à un ressort 290
§ 117 Pendule 291
§ 118* Oscillations amorties 292
§ 119* Oscillations forcées et résonance 295
§ 120 Exemples de calcul 299

Chapitre 21: SYSTEMES MATERIELS

§ 121* Centre de masse 305
§ 122* Théorème du centre de masse 308
§ 123* Théorème du moment cinétique 310
§ 124* Energie d'un système 311
§ 125* Systèmes isolés 312
§ 126* Satellite 315
§ 127* Oscillateur double 316
§ 128* Exemples de calcul 318

Chapitre 22: DYNAMIQUE DES FLUIDES

§ 129* Equation de Bernoulli 320
§ 130* Applications 324
§ 131* Exemples de calcul 325

Chapitre 23: ROTATION DES SOLIDES

§ 132* Cinématique des rotations 328
§ 133* Moment d'inertie 330
§ 134* Théorème du moment cinétique 333
§ 135* Energie d'un corps en rotation 337
§ 136* Gyroscope 338
§ 137* Oscillateur harmonique 340
§ 138* Correspondances entre translations et rotations 343
§ 139* Exemples de calcul 343

Exercices 349
Index 393
Table des matières 396
Constantes physiques 400

CONSTANTES PHYSIQUES

Vitesse de la lumière dans le vide: $c = 2{,}9979.10^{8}\ ms^{-1}$

Constante de gravitation: $G = 6{,}673.10^{-11}\ Nm^{2}kg^{-2}$

Constante de Plank: $h = 6{,}626.10^{-34}\ Js$

$\hbar = h/2\pi = 1{,}054.10^{-34}\ Js$

Nombre d'Avogadro: $N_A = 6{,}022.10^{23}\ mol^{-1}$

Constante de Boltzmann: $k = 1{,}381.10^{-23}\ JK^{-1}$

Constante du gaz parfait: $R = 8{,}314\ Jmol^{-1}K^{-1}$

Température normale (0 °C): $T_o = 273{,}15\ K$

Masse de l'électron: $9{,}1095.10^{-31}\ kg$

Masse du proton: $1{,}672.10^{-27}\ kg$

Masse du neutron: $1{,}675.10^{-27}\ kg$

Masse de la terre: $5{,}98.10^{24}\ kg$

Masse du soleil: $1{,}99.10^{30}\ kg$

Masse de la lune: $7{,}35.10^{22}\ kg$

Rayon moyen de la terre: $6{,}37.10^{6}\ m$

Rayon moyen du soleil: $6{,}96.10^{8}\ m$

Rayon moyen de la lune: $1{,}74.10^{6}\ m$

Distance moyenne de la terre au soleil: $1{,}496.10^{11}\ m$

Distance moyenne de la terre à la lune: $3{,}844.10^{8}\ m$

Substance	Masse volumique
Acier	$7{,}7\ .10^{3}\ kgm^{-3}$
Air (0 °C)	1,293
Air (20 °C)	1,206
Alcool (Ethanol)	$0{,}789.10^{3}$
Aluminium	$2{,}70\ .10^{3}$
Azote (0 °C)	1,251
Eau (20 °C)	$0{,}998.10^{3}$
Fer	$7{,}86\ .10^{3}$
Glace (0 °C)	$0{,}917.10^{3}$
Glycérine	$1{,}26\ .10^{3}$
Huile d'olive	$0{,}92\ .10^{3}$
Hydrogène (0 °C)	0,0899
Mercure	$13{,}6\ .10^{3}$
Plomb	$11{,}3\ .10^{3}$

Equivalences:

1 Å = 10^{-10} m

1 kp = 9,81 N

1 kg* = 9,81 N

1 cal = 4,185 J

1 kWh = $3{,}6.10^{6}$ J

1 eV = $1{,}602.10^{-19}$ J

1 Ch = 736 W

1 atm = 760 mm Hg

= $1{,}013.10^{5}$ Pa

= 1,033 $kg^{*}cm^{-2}$

Tous droits de reproduction réservés.